

Discussion Paper No.353

Unawareness and Reverse Symmetry:
Aumann Structure with Complete Lattice

[in japanese]

Yoshihiko Tada
Chuo University
Economic Reserch Institute,
Associate Researcher

July 2021



INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

Unawareness and Reverse Symmetry: Aumann Structure with Complete Lattice [in Japanese]*

多田 由彦**

First Version: June 17, 2021 [in English]

This Version: July 19, 2021

Abstract

本稿は完備束を伴った Aumann 構造をモデル化し, unawareness について議論する. 多属性状態空間モデルに於いて, unawareness を議論する先行研究では完備束を伴った状態空間の集合族を仮定しているけれども, 標準的な状態空間が完備束であるようなモデルについてはまだない. 本稿は, 状態空間の集合族を定式化することなしに, 集合論的アプローチと構成法的アプローチを用いて完備束を伴った状態空間をモデル化する. しかしながら, 本稿のモデルに於いて, unawareness 演算子のほとんどの性質は先行研究と同様の結果を導いたけれども, Symmetry と non-trivial unawareness については両立しなかった. 前述の理由から, 本稿は Revers Symmetry という性質を提案し, unawareness が non-trivial であることの必要十分条件が Reverse Symmetry が成立することであることを示し, その含意について議論する.

Keywords: State space, Aumann structure, unawareness, complete lattice, constructive approach, overloaded operator.

JEL Codes: C70, C72, D80, D83.

* 本稿は日本人研究者向けに, 拙著 “Unawareness and Reverse Symmetry: Aumann Structure with Complete Lattice” を翻訳した上で加筆修正したものである. “Aumann Structure with Complete Lattice and Unawareness: Constructive Approach” IERCU Discussion Paper No. 347 は本稿の前のバージョンとなる. ただし, 定義・定理・証明などについては英語のまま載せている.

** 中央大学大学院

E mail: yoshihiko.tada.4@gmail.com

1 Introduction

高階の無知を意味する unawareness は Fagin and Halpern (1988) によって提案された。しかしながら、分割的状态空間モデル或いは標準的な Aumann structure モデルに於いて (e.g., Aumann 1976), 知識演算子が Necessitation ($K(\Omega) = \Omega$) を満たし, unawareness 演算子が Plausibility ($U(E) = \neg K(E) \cap \neg K \neg K(E)$), KU Introspection ($KU(E) = \emptyset$), AU Introspection ($U(E) = UU(E)$) を満たすならば, non-trivial unawareness ($U(E) \neq \emptyset$) をモデル化することはできない (Dekel et al. 1998).

この問題を解決するために unawareness の議論では二つのアプローチが検討された。一つは Heifetz et al. (2006), Li (2009) によって提案された unawareness structure である。このモデルでは, unawareness は概念の欠落 (lack of conception) を意味する。もう一つのアプローチは非分割的状态空間モデルである (e.g., Modica and Rustichini 1994, 1999; Geanakoplos 1989). Unawareness structure における状態空間は完備束であるのに対して, 標準的な状態空間モデルでの状態空間は完備束ではない。標準的な状態空間と unawareness を伴った状態空間の基本的な違いは次のようになっている。前者は平面的である—言い換えると, 各状態は独立である—のに対して, 後者はそうではない。これはある状態について束であるような順序関係を持っているかもしれないこ

とを意味する。^{1,2}

Heifetz et al. (2006) と Li (2009) では、互いに素な状態空間の集合族が完備束であった。しかしながら、状態空間それ自体が完備束であるようなモデルはまだない。本稿は集合論的アプローチと構成法的アプローチから、そのような状態空間を構築し、それを *constructive state space* と呼ぶ。我々の状態空間は Heifetz et al. (2006), Li (2009) が提案した状態空間と同値になっている。

我々のアプローチに於いて、標準的な演算子は不便である。なぜなら、標準的な演算子では、Heifetz et al. (2006) や Li (2009) の状態空間に於いて、 ϕ に該当するような状態を定義することができないからである。この点を回避するために、我々は演算子の多重定義 (*overloaded operator*) を定義しなければならない。我々の演算子は複数のアリティを持つ。我々の状態空間は Heifetz et al. (2008) に近いけれども、*unawareness* に関する我々の議論や仮定については彼らのものとは異なっている。

我々の状態空間に於いて、任意の (主観的) 状態空間は *constructive state space* の部分集合となっている。特定の状態空間に属する状態の意味は、他の異なる状態空間に属する状態の意味と同じではない。なぜなら、ある属性につ

¹ 近年では、Fukuda (2020) が *unawareness structure* と非分割状態空間モデルとを結ぶ一般化状態空間モデルを提案している。

² *Unawareness* の研究をサーベイしたものとして、Schipper (2014, 2015) が挙げられる。

いて、前者では含まれているかもしれないのに対して、後者では含まれていないかもしれないからである。状態の意味はどの状態空間に属しているのかに依存する。従って、ある状態の意味は与えられた状態空間に於ける他の状態との関係の中で決められる。

本稿は *constructive state space* に基づく *constructive Aumann structure* のモデル化を行い、その状態空間上での可能性対応、知識演算子、*awareness/unawareness* 演算子を定義する。これらの演算子のほとんどの性質については、先行研究で示されたものと同じである。

しかしながら、興味深いことに *Symmetry* ($U(E) = U(\neg E)$) は *non-trivial unawareness* と両立しない。*Symmetry* は先行研究に於いて、その性質が証明されるか (e.g., Heifetz et al 2006, 2013a; Li 2009; Fukuda 2020), その性質を仮定するか (e.g., Modica and Rustichini 1994, 1999; Halpern 2001; Heifetz et al. 2008; Sadzik 2021) のいずれかがとられているにもかかわらずである。我々は *Symmetry* が成立しない性質を *Reverse Symmetry* と呼ぶ。*Reverse Symmetry* は二つの含意を持つ。一つは、我々は主体が認識できる事象とその反対事象とを同じアプローチを用いて議論してはならないということである。もう一つは様相論理に於ける *unawareness* の議論に *S5* は必要ではないかもしれないということである。Modica and Rustichini (1994) は *Symmetry* を仮定し、 $S4 + \text{Symmetry} = S5$ を証明した。対照的に我々は、本稿のモデルの中で *Reverse Symmetry* を示したので、 $S4 + \text{Reverse Symmetry}$ について考察しなくてはならないだろう。

さらに, Awareness Leads to Knowledge は成立しない. Galanis (2013) は Awareness Leads to Knowledge を提案し, unawareness structure に於いてこの性質を証明した. 対照的に本稿では, この性質の逆の包含関係を示した. 我々のモデルに於ける仮定は Galanis (2013) と同様である. しかしながら, 得られた結果は反対のものとなった. これらの相反する結果は, unawareness structure と constructive Aumann structure の違いを強調している.

Constructive Aumann structure は Dekel et al. (1998), Chen et al. (2012) の主要定理の一般化を導くことができる. 知識演算子と awareness/unawareness 演算子のいくつかの性質は先行研究と同じであるので, 我々のモデルは標準的な状態空間モデルと unawareness structure との中間に位置すると言える.

本稿は以下のように構成される. Section 2 では Heifetz et al. (2006) と Li (2009) それぞれの状態空間をモデル化する. Section 3 では constructive state space をモデル化し, Heifetz et al. (2006), Li (2009) の状態空間と比較する. Section 4 では, constructive Aumann structure をモデル化し, 可能性対応, 知識演算子, awareness/unawareness 演算子を定義して, その性質について議論する. Section 5 では, 結論を述べる.

2 State Space in Previous Studies about Unawareness

本節では, Heifetz et al. (2006) と Li (2009) が定義した状態空間を定式化する

る.³

2.1 State Space in Heifetz et al. (2006)

まず, Heifetz et al. (2006) が提案した状態空間をモデル化する. 我々はこれを HMS-state space と呼ぶ. $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ を互いに素な状態空間の完備束とする. \leq は \mathcal{S} 上の完備束とする. 任意の $S, S' \in \mathcal{S}$ に対して, $S \geq S'$ は “ S は S' よりも表現されている” と解釈する. このとき, 全射の射影 $R_{S'}^S: S \rightarrow S'$ が存在する. すなわち, 任意の $\omega \in S$ に対して, $R_{S'}^S(\omega) \in S'$ が成立する. HMS-state space は $\Sigma = \bigcup_{\lambda \in \Lambda} S_\lambda$ と記される. 標準的な状態空間は Σ ではなく, \mathcal{S} 上の各状態空間である. 従って, HMS-state space は全ての互いに素な状態空間の合併である.

Example 1 $\mathcal{S} = \{S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}, S_{\{y\}}, S_{\{\phi\}}\}$ が互いに素な状態空間の完備束であるとする. $S_{\{x,y\}} = \{xy, x\neg y, \neg xy, \neg x\neg y\}$, $S_{\{x\}} = \{x, \neg x\}$, $S_{\{y\}} = \{y, \neg y\}$, $S_{\{\phi\}} = \{\phi\}$ とする. 例えば, x は x が真であることを意味し, $\neg x$ は x が偽であることを意味する. 二つの異なる状態空間 $S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}$ が与えられたとき,

$$R_{S_{\{x\}}}^{S_{\{x,y\}}}(xy) = R_{S_{\{x\}}}^{S_{\{x,y\}}}(x\neg y) = x \quad \text{かつ} \quad R_{S_{\{x\}}}^{S_{\{x,y\}}}(\neg xy) = R_{S_{\{x\}}}^{S_{\{x,y\}}}(\neg x\neg y) = \neg x \quad \text{が成り}$$

³ 本稿は unawareness structure については議論しない. Unawareness structure について議論した先行研究として以下のものが挙げられる. Heifetz et al. (2006, 2008, 2013a), Li (2009), Heinsalu (2012), Galanis (2013, 2018), Schipper (2014, 2015), Fukuda (2020), and Sadzik (2021).

立つ. このとき, $S_{\{x\}}$ のみを認識することができる主体は y を認識することができない. 主体は $xy, x\neg y$ に対しては, x と認識し, $\neg xy, \neg x\neg y$ に対しては, $\neg x$ と認識する. この例では, HMS-state space は $\Sigma = S_{\{x,y\}} \cup S_{\{x\}} \cup S_{\{y\}} \cup S_{\{\phi\}}$ であり, 標準的な状態空間は \mathcal{S} 上の各要素, すなわち $S_{\{x,y\}}, S_{\{x\}}, S_{\{y\}}, S_{\{\phi\}}$ である. Figure 1 はこの例を表している. ■

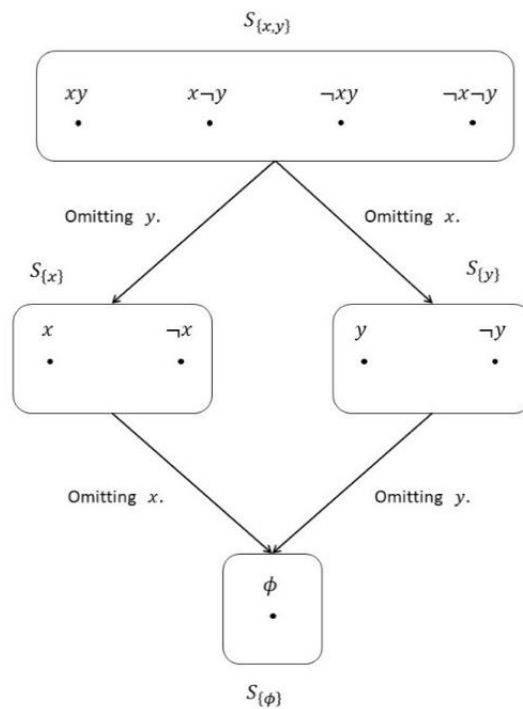


Fig. 1: HMS-state space.

2.2 State Space in Li (2009)

ここで Li が提案した状態空間を定式化し, それを Li-state space と名付ける. 質問の集合 Q^* をとる. $q \in Q^*$ に対する解答の集合を $A_q = \{a_q, \neg a_q\}$ と

表す. ここで, カルテシアン直積集合 $\prod_{q \in Q^*} A_q$ は客観的状态空間を表す. $Q \subseteq Q^*$ を与えられたとき, $\prod_{q \in Q} A_q$ は主観的状态空間を表す. $Q = \emptyset$ であるならば, $\prod_{q \in Q} A_q = \{\phi\}$ であるとする. このとき, 明らかに二つの異なる状態空間 $A, A' \in \{\prod_{q \in Q} A_q | Q \subseteq Q^*\}$ は互いに素である. $Q' \subseteq Q \subseteq Q^*$ が成立する任意の $Q, Q' \in 2^{Q^*} \setminus \{\emptyset\}$ に対して, 全射の射影 $\pi_{Q'}^Q: \prod_{q \in Q} A_q \rightarrow \prod_{q \in Q'} A_q$ が存在する. 従って, 任意の $\omega \in \prod_{q \in Q} A_q$ に対して, $\pi_{Q'}^Q(\omega) \in \prod_{q \in Q'} A_q$ が成り立つ. ここで Li-state space を $\mathcal{A} = \bigcup_{Q \subseteq Q^*} \prod_{q \in Q} A_q$ と記す. 標準的な状態空間は \mathcal{A} ではなく, \mathcal{A} 上の各要素である. 従って, Li-state space は \mathcal{A} 上の互いに素な状態空間すべてを合併したものである.

Example 2 $Q^* = \{q(x), q(y)\}$ は質問の集合であるとする. ここで, $q(x)$ は属性 x についての質問であるとし, $q(y)$ は属性 y についての質問であるとする. 各質問に対する解答の集合を $A_{q(x)} = \{a_{q(x)}, \neg a_{q(x)}\}$, $A_{q(y)} = \{a_{q(y)}, \neg a_{q(y)}\}$ と書く. x を与えられたとき, $a_{q(x)}$ は “ $q(x)$ に対する解答が yes である” と解釈し, $\neg a_{q(x)}$ は “ $q(x)$ に対する解答が no である” と解釈する. 客観的状态空間は $A_{q(x)} \times A_{q(y)}$ であり, 主観的状态空間は $A_{q(x)}$, $A_{q(y)}$, $A_{q(\phi)}$ それぞれである. $\{q(x)\} \subseteq Q^*$ を与えられたとき, 全射の射影 $\pi_{\{q(x)\}}^{Q^*}: A_{q(x)} \times A_{q(y)} \rightarrow A_{q(x)}$ が存在する. このとき, $\pi_{\{q(x)\}}^{Q^*}(a_{q(x)}, a_{q(y)}) = \pi_{\{q(x)\}}^{Q^*}(a_{q(x)}, \neg a_{q(y)}) = a_{q(x)}$, $\pi_{\{q(x)\}}^{Q^*}(\neg a_{q(x)}, a_{q(y)}) = \pi_{\{q(x)\}}^{Q^*}(\neg a_{q(x)}, \neg a_{q(y)}) = \neg a_{q(x)}$ が成立する. 属性 x のみを認識することができる主体は状態 $(a_{q(x)}, a_{q(y)})$ と $(a_{q(x)}, \neg a_{q(y)})$ を状態 $a_{q(x)}$ と認識し, 状態 $(\neg a_{q(x)}, a_{q(y)})$

と $(\neg a_{q(x)}, \neg a_{q(y)})$ を状態 $\neg a_{q(x)}$ と認識する. このとき, Li-state space は $\mathcal{A} = A_{q(x)} \times A_{q(y)} \cup A_{q(x)} \cup A_{q(y)} \cup A_{q(\phi)}$ であり, 標準的な状態空間は $A_{q(x)} \times A_{q(y)}, A_{q(x)}, A_{q(y)}, A_{q(\phi)}$ それぞれである. Figure 2 はこの例を図で表したものである. ■

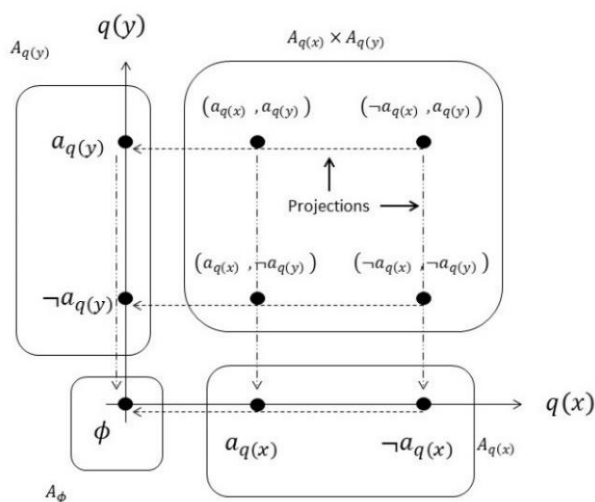


Fig. 2: Li-state space.

3 Constructive State Space

標準的な状態空間モデルは状態空間が多属性の性質を持っていたとしても, 状態空間が半束であるとは仮定しない. 例えばサイコロの目など.⁴ 対照的に,

⁴ 我々はサイコロの目を多属性で表現することができる. 例えば“1の目”を“1であり, かつ2,3,4,5,6ではない”と多属性で表現することができる. このとき, 状態空間は完備束ではなく, 半束となる.

unawareness structure に於ける状態空間は完備束である。しかしながら, unawareness structure では, 状態空間の集合族の要素が標準的な状態空間にあたるので, 各状態空間は半束ではない。本節では標準的な状態空間を半束, あるいは完備束として定式化する。我々の定式化のアプローチは Hiefetz et al. (2008), Li (2009) と同じように, 構成法的アプローチをとっているので, 我々はこの状態空間を *constructive state space* と名付ける。

3.1 *Overloaded Function*

まず我々は関数の多重定義を定義する。二つの集合 X, Y を与えたとき, 任意の $k = 0, 1, \dots, n$ に対して, X_k を以下のように定義する。

$$X_k = \begin{cases} \emptyset & \text{if } k = 0; \\ \times_k X & \text{otherwise.} \end{cases}$$

Definition of overloaded functions: 関数 f が $n + 1$ 組のアリティ $(0, 1, \dots, n)$ によって多重定義されているとは, f が以下を満たすことである。

$$f: \bigcup_{k=0}^n X_k \rightarrow Y.$$

本稿は演算子に対しても多重定義を適用することができると仮定する。

3.2 *Overloaded Operator and Constructive State Space*

本節では構成法的アプローチを用いて状態空間をモデル化し、そしてそれを議論する。 P を基本命題の集合、あるいは概念の集合とする。3 組のアリティ $(0, 1, 2)$ をもつ多重定義された演算子 \vee を与えたとき、以下の条件を満たすと仮定する。

C1 For any $p \in P$, $p \vee = \vee p = p \vee p = p$.

C2 $\vee = \phi$.

C3 For any $p, p' \in P$, $p \vee p' = p' \vee p$.

C4 For any $p, p', p'' \in P$, $p \vee (p' \vee p'') = (p \vee p') \vee p''$.

C1 は \vee のアリティが 1 または 2 のとき、 p はそれ自身を導くことができることを意味する。C2 は技術的な仮定である。アリティが 0 であるとき、 \vee は ϕ を導く。 ϕ は “すべての命題は真ではない” と解釈される。C3 は \vee が交換率を満たすことを、C4 は \vee が吸収率を満たすことを意味する。

ここで、任意の基本姪の部分集合 $X \subseteq P$ に対して、—このとき、 X は空集合かもしれない— $\bigvee_{p \in X} p$ は状態である。 $\Omega = \{\bigvee_{p \in X} p \mid X \subseteq P\}$ を客観的状态空間とする。また、任意の $X \subseteq P$ に対して、 $\Omega_X = \{\bigvee_{p \in Y} p \mid Y \subseteq X\}$ を主観的状态空間とする。 $Y \subseteq X \subsetneq P$ であるような任意の $X, Y \in 2^P \setminus \{\emptyset\}$ に対して、 $\bigvee_{p \in Y} p \in \Omega$ かつ $\bigvee_{p \in Y} p \in \Omega_X$ が成り立つことは明らかである。しかしながら、 Ω に於ける $\bigvee_{p \in Y} p$ での属性は Ω_X に於ける $\bigvee_{p \in Y} p$ での属性と異なる。 Ω に於いて、 $\bigvee_{p \in Y} p$ は任意の属性 $p' \in P \setminus Y$ が成り立たないことを含んでいる。

対照的に Ω_X に於いて, $\forall_{p \in Y} p$ は任意の $p' \in P \setminus Y$ が成り立たないことを含むが, 任意の $p'' \in P \setminus X$ が成り立つかどうかについてはその意味を含めていない. Ω_X に於ける $\forall_{p \in Y} p$ は Ω_X 上の任意の要素と関連付けられているが, $\Omega \setminus \Omega_X$ 上のすべての要素とは関連付けられていない. このとき, Ω_X 上の全ての $\forall_{p \in Y} p$ はどの属性 $p'' \in P \setminus X$ も持たない.

ここで射影を定義する. 任意の基本命題の集合 $X, Y \subseteq P$ に対して, 射影 $r_Y^X: \Omega_X \rightarrow \Omega_Y$ が存在する. この射影は全射ではないかもしれない. 従って, 任意の $\forall_{p \in Z: Z \subseteq X} p \in \Omega_X$ に対して, $r_Y^X(\forall_{p \in Z: Z \subseteq X} p) = \forall_{p \in Z \cap Y: Z \subseteq X} p \in \Omega_Y$ とすることができる. このとき, $r_Y^X \circ r_X^P = r_Y^P$ が成り立つ. 以下では, $\forall_{p \in Z: Z \subseteq P} p = \omega$ とし, かつ任意の $\omega \in \Omega$, $X \subseteq P$ に対して, $r_X^P(\omega) = \omega_X$ とする. 任意の $X \subseteq P$ に対して, r_X^X は単位元であるとする. すなわち, 任意の $\omega \in \Omega_X$ に対して, $r_X^X(\omega) = \omega$ となる.

客観的状态空間 Ω は完備束である. Ω は完備束を伴った標準的な状態空間であるけれども, 我々はこれを `constructive state space` と呼ぶ.

Remark 1 For any subsets X, Y such that $Y \subseteq X \subseteq P$, $\Omega_Y \subseteq \Omega_X$.

Remark 1 は我々の (主観的) 状態空間は客観的状态空間の部分集合であることを意味する. これは Heifetz et al. (2006) や Li (2009) とは異なる. この特徴は `unawareness structure` とは異なり, (非分割的) 状態空間モデルとおなじである. さらに, 異なる状態空間は共通部分を持ち, すべての共通部分は ϕ を

持たなければならない。

我々の定式化は Heifetz et al. (2008) に似ている。しかしながら、我々の定式化は集合論的アプローチであるのに対して、彼らの定式化は論理的アプローチをとっている。さらに、unawareness についての我々の議論と彼らの議論との間には重要な違いが存在する。Heifetz et al. は awareness/unawareness 演算子が Symmetry を満たすことを仮定する。対照的に、我々は awareness/unawareness 演算子が Symmetry と Non-triviality が両立しないことを示した。それぞれの状態空間は同様の定式化を行っているけれども、我々の結果は彼らの結果と異なっているので、我々の枠組みと彼らの枠組みは異なっていると主張することができる。

Example 3 $P = \{x, y\}$ を基本命題の集合とし、 $\Omega = \{x \vee y, x, y, \phi\}$, $\Omega_{\{x\}} = \{x, \phi\}$, $\Omega_{\{y\}} = \{y, \phi\}$, $\Omega_{\{\phi\}} = \{\phi\}$ を状態空間とする。各状態空間は Ω の部分集合である。射影は全射ではないので、二つの集合 $\{x\}$, $\{y\}$ を与えられたとき、 $r_{\{y\}}^{\{x\}}(x) = r_{\{y\}}^{\{x\}}(\phi) = \phi$ が成り立つ。明らかに、共通部分は ϕ を持つ。このとき、 Ω は constructive state space である。Figure 3 はこの例を図で示したものである。

ここで、 ϕ に焦点を与える。 $\phi \in \Omega$ であるならば、状態 ϕ は $x \vee y$, x , y のいずれでもないことを意味する。対照的に、 $\phi \in \Omega_x$ ならば、 ϕ は x を表現していないことだけを意味し、 $x \vee y$, y を表現しているかどうかについては意味しない。このときの ϕ は概念 y を含まない。すなわち、任意の二つの状

態空間が異なるならば、それらに属する同じ状態は二つの状態空間の間で同じ属性を持たない. ■

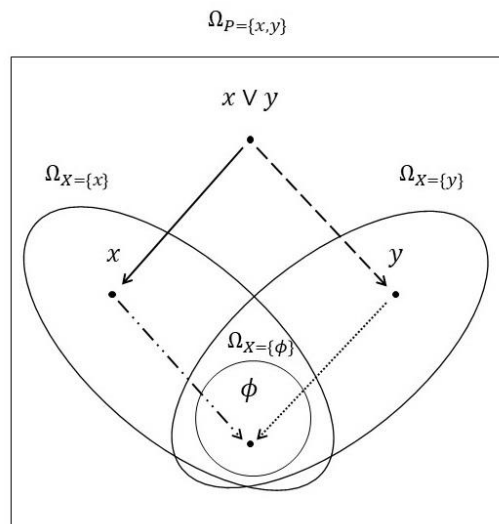


Fig. 3: Constructive state space.

3.3 Relationships with Other State Spaces

我々の constructive state space は以下の補題によって HMS-state space と Li-state space と関連付けられる.

Lemma 1 The following are equivalent:

1. A constructive state space can be constructed.
2. An HMS-state space can be constructed.

Proof. (1 \Rightarrow 2) Any constructive state space Ω has the set of basic propositions P and

for any subset $X \subseteq P$, there is $\Omega_X = \{\bigvee_{p \in Y} p \mid Y \subseteq X\}$. Here, let us define the family of disjoint sets \mathcal{S} and bijective mapping $f: \{\Omega_X \mid X \subseteq P\} \rightarrow \mathcal{S}$. Then, for any $X, Y \subseteq P$, if $X \neq Y$, then $f(\Omega_X) \cap f(\Omega_Y) = \emptyset$. Let \preceq be a partial order on \mathcal{S} and be defined as follows: if $X \subseteq Y$, then $f(\Omega_X) \preceq f(\Omega_Y)$. Then, suppose that there exists a surjective projection $r_{\Omega_X}^{\Omega_Y}: \Omega_Y \rightarrow \Omega_X$. Then, $\mathcal{S} = \{f(\Omega_X) \mid X \subseteq P\}$ is a complete lattice, and $\Sigma = \bigcup_{X \subseteq P} f(\Omega_X)$ is an HMS-state space.

(2 \Rightarrow 1) Any HMS-state space Σ has a complete lattice with disjoint spaces $\mathcal{S} = \{S_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$. Here, let us define $\mathcal{S}^{min} = \{S \in \mathcal{S} \mid S \text{ is minimal element on } \mathcal{S} \setminus \{\emptyset\}\}$, let P be some set and be given a bijective mapping $\hat{f}: \mathcal{S}^{min} \rightarrow P$. Then, an overloaded operator with 3-tuple arities $(0, 1, 2)$, \vee , satisfies the following.

- For any $S \in \mathcal{S}^{min}$, $\hat{f}(S) \vee = \vee \hat{f}(S) = \hat{f}(S) \vee \hat{f}(S) = \hat{f}(S)$.
- $\vee = \emptyset$.
- For any $S, S' \in \mathcal{S}^{min}$, $\hat{f}(S) \vee \hat{f}(S') = \hat{f}(S') \vee \hat{f}(S)$.
- For any $S, S', S'' \in \mathcal{S}^{min}$, $\hat{f}(S) \vee (\hat{f}(S') \vee \hat{f}(S'')) = (\hat{f}(S) \vee \hat{f}(S')) \vee \hat{f}(S'')$.

Then, for any $\mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{min}$, $\Omega_{\mathcal{X}} = \{\bigvee_{S \in \mathcal{X}} \hat{f}(S) \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{min}\}$. Let us define that for any $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \subseteq \mathcal{S}^{min}$, if we define a projection $r_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}: \Omega_{\mathcal{X}} \rightarrow \Omega_{\mathcal{Y}}$, then for any $\bigvee_{S \in \mathcal{Z}: \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}} S$, $r_{\mathcal{Y}}^{\mathcal{X}}(\bigvee_{S \in \mathcal{Z}: \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}} S) = \bigvee_{S \in \mathcal{Z} \cap \mathcal{Y}: \mathcal{Z} \subseteq \mathcal{X}} S$. Then, $\{\hat{f}(S) \mid S \in \mathcal{S}^{min}\}$ is the set of basic propositions, and $\Omega = \{\bigvee_{S \in \mathcal{X}} \hat{f}(S) \mid \mathcal{X} \subseteq \mathcal{S}^{min}\}$ is a constructive state space. ■

Lemma 2 The following are equivalent:

1. A constructive state space can be constructed.

2. A Li-state space can be constructed.

Proof. (1 \Rightarrow 2) Any constructive state space Ω has the set of basic propositions P , and for any $X \subseteq P$, there is $\Omega_X = \{\bigvee_{p \in Y} p \mid Y \subseteq X\}$. Here, given some set Q^* and a bijection mapping $g: P \rightarrow Q^*$. Then, for any $p, p' \in P$, $g(p) \neq g(p')$. Moreover, for any $p \in P$, let us define $A_{g(p)} = \{a_{g(p)}, \neg a_{g(p)}\}$ and for any $X \subseteq P$, given $\prod_{p \in X} A_{g(p)}$. Note that, if $X = \emptyset$, we denote it by $\prod_{p \in X} A_{g(p)} = \{\phi\}$. Here, for any $X, Y \subseteq P$, such that $X \neq Y$, $\prod_{p \in X} A_{g(p)} \neq \prod_{p \in Y} A_{g(p)}$ is evident. When $Y \subseteq X$, suppose that there is a surjective projection $r_Y^X: \prod_{p \in X} A_{g(p)} \rightarrow \prod_{p \in Y} A_{g(p)}$. Then, $\{g(p) \mid p \in P\}$ is the set of questions, and $\mathcal{A} = \bigcup_{X \subseteq P} \prod_{p \in X} A_{g(p)}$ is a Li-state space.

(2 \Rightarrow 1) Any Li-state space \mathcal{A} has the set of questions Q^* . Here, given some set P a bijection mapping $\hat{g}: Q^* \rightarrow P$; then, for any $q, q' \in Q^*$, if $q \neq q'$, $\hat{g}(q) \neq \hat{g}(q')$.

Let us define an overloaded operator \vee as follows.

- For any $q \in Q^*$, $\hat{g}(q) \vee = \vee \hat{g}(q) = \hat{g}(q) \vee \hat{g}(q) = \hat{g}(q)$.
- $\vee = \phi$.
- For any $q, q' \in Q^*$, $\hat{g}(q) \vee \hat{g}(q') = \hat{g}(q') \vee \hat{g}(q)$.
- For any $q, q', q'' \in Q^*$, $\hat{g}(q) \vee (\hat{g}(q') \vee \hat{g}(q'')) = (\hat{g}(q) \vee \hat{g}(q')) \vee \hat{g}(q'')$.

Then, for any $Q \subseteq Q^*$, let $\Omega_Q = \{\bigvee_{q \in Q} \hat{g}(q) \mid Q \subseteq Q^*\}$. For any $Q, Q' \subseteq Q^*$, given a projection $r_{Q'}^Q: \Omega_Q \rightarrow \Omega_{Q'}$ and for any $\bigvee_{q \in Q''} \hat{g}(q) \in \Omega_Q$, let us define $r_{Q'}^Q(\bigvee_{q \in Q''} \hat{g}(q)) = \bigvee_{q \in Q'' \cap Q'} \hat{g}(q)$. Then, $\{\hat{g}(q) \mid q \in Q^*\}$ is the set of basic propositions, and $\Omega = \{\bigvee_{q \in Q} \hat{g}(q) \mid Q \subseteq Q^*\}$ is a constructive state space. ■

これらの補題は任意の constructive state space は HMS-state space と Li-state space を構成することができ、かつ逆も構成することができることを示す。

Proposition 1 The following are equivalent.

1. A constructive state space can be constructed.
2. HMS-state space can be constructed.
3. Li-state space can be constructed.

Constructive state space を HMS-state space と関連付けて考えよう。Example

2 と Example 3 を比較したとき、これらの関係は以下のようにになっている。

$$S_{\{x,y\}} \Leftrightarrow \Omega$$

$$S_{\{x\}} \Leftrightarrow \Omega_{\{x\}}$$

$$S_{\{y\}} \Leftrightarrow \Omega_{\{y\}}$$

$$S_{\{\phi\}} \Leftrightarrow \Omega_{\{\phi\}}$$

$S_{\{x,y\}}$ と Ω を比較したとき、二つの状態空間の間で各状態は以下のように関連付けられている。

$$xy \Leftrightarrow x \vee y$$

$$x \neg y \Leftrightarrow x$$

$$\neg xy \Leftrightarrow y$$

$$\neg x \neg y \Leftrightarrow \phi$$

対照的に、 $S_{\{x\}}$ と $\Omega_{\{x\}}$ を比較したとき、状態空間の間で各状態は以下のように関連付けられている。

$$x \Leftrightarrow x$$

$$\neg x \Leftrightarrow \phi$$

これらの比較によって、 Ω に於ける x と $\Omega_{\{x\}}$ に於ける x が異なる含意を持ち、同様に Ω に於ける ϕ と $\Omega_{\{x\}}$ に於ける ϕ が異なる含意を持つことが分かる。 $\Omega_{\{x\}}$ は y が欠落している。

さらに、 Ω と Σ は以下のように関係している。

$$xy \Leftrightarrow x \vee y$$

$$x \Leftrightarrow x$$

$$y \Leftrightarrow y$$

$$\phi \Leftrightarrow \phi$$

これは Ω の各要素が Σ 上の否定を除いた各要素と関連付けられていることを意味する。すなわち、 Ω は $S_{\{x,y\}} \subseteq \Sigma$ と関連付けられているだけでなく、 $\{xy, x, y, \phi\} \subseteq \Sigma$ とも関連付けられている。従って、 Ω は Σ に対して二重構造となっている。

4 Constructive Aumann Structure

本節では、constructive state space に基づいて constructive Aumann structure をモデル化し、それについて議論する。我々は単一主体に焦点を当て、可能性対応、知識演算子、awareness/unawareness 演算子を constructive Aumann structure

上で定義する。そして、これらの性質について議論する。最後に我々は Dekel et al. (1998) と Chen et al. (2012) が示した主要定理の一般化を行う。

4.1 Possibility Correspondence

標準的な Aumann structure における可能性対応は状態空間上でのみ定義される。対照的に我々の状態空間は半束であるから、可能性対応の定義域は我々の状態空間だけでなく、基本命題の冪集合も定義域となる。 $\langle P, \Omega, \Pi \rangle$ を constructive Aumann structure とする。ここで Ω は P から構成されるとする。このとき、 $\Pi: \Omega \times 2^P \rightarrow 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$ を可能性対応とする。主体は基本命題の部分集合 $X \subseteq P$ 上の基本命題を全て認識することができ、 $Y \subseteq P \setminus X$ 上の基本命題については認識できないものと仮定する。この時、任意の $\omega \in \Omega$ に対して、 $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega$ が成立する。ここで我々は可能性対応が以下の性質を満たすものと仮定する。

1. Subjective Nondelusion: 任意の $\omega \in \Omega$ と $X \subseteq P$ に対して、 $\omega_X \in \Pi(\omega, X)$.
2. Stationarity: 任意 $\omega, \omega' \in \Omega$ と $X \subseteq P$ 、 $\omega' \in \Pi(\omega, X)$ ならば、 $\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$.

Example 3 (Continued.) $\omega_1 = x \vee y$, $\omega_2 = x$, $\omega_3 = y$, $\omega_4 = \phi$ とする。主体は基本命題集合 $X = \{x\}$ を認識できると仮定する。Subjective Nondelusion より、 $\omega_2 \in \Pi(\omega_1, X)$, $\omega_3 \in \Pi(\omega_2, X)$, $\omega_4 \in \Pi(\omega_3, X)$, $\omega_4 \in \Pi(\omega_4, X)$ が成り立つ。Stationarity より、 $\Pi(\omega_1, X) = \Pi(\omega_2, X)$, $\Pi(\omega_3, X) = \Pi(\omega_4, X)$ が成り立つ。な

お、 $\Pi(\omega_1, X) = \Pi(\omega_3, X)$ が成立するかどうかは、どのように Π を定義したのかに依存する。■

Subjective Nondelusion と Stationarity は標準的な Aumann structure に於ける分割的情報関数と類比である。 X が P の部分集合であるとき、 Π は明らかに Ω 上で分割的ではない。しかしながら、 Ω_X 上では分割的かもしれない。

Definition 1 (Partial Partition) Given any $X \subseteq P$. $\Pi: \Omega \times 2^P \rightarrow 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$ is *partially partitional* on Ω_X if there exists $\mathcal{P} = \{P_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ such that

1. $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = \Omega_X$;
2. For any $\omega \in \Omega$, there exists P_λ such that $\omega_X \in P_\lambda$ and $\Pi(\omega, X) = P_\lambda$; and
3. For any $P_\lambda, P_{\lambda'} \in \mathcal{P}$, if $P_\lambda \neq P_{\lambda'}$, then $P_\lambda \cap P_{\lambda'} = \emptyset$.

部分的分割 (partial partition) は標準的な Aumann structure における分割と類比である。我々は以下の命題を導くことができる。

Proposition 2 Given any $X \subseteq P$. Π is partially partitional on Ω_X if and only if Π satisfies Subjective Nondelusion and Stationarity.

Proof. (\Rightarrow) Suppose that the possibility correspondence Π is partially partitional on Ω_X . Then, by Condition 1 in Definition 1, $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} P_\lambda = \Omega_X$ and by Condition 2 in

Definition 1, for any $\omega \in \Omega$, because there exists P_λ with $\omega_X \in P_\lambda$ such that $\Pi(\omega, X) = P_\lambda$, $\omega_X \in \Pi(\omega, X)$. That is, Π satisfies Subjective Nondelusion. Moreover, by Condition 3 in Definition 1, for any $P_\lambda, P_{\lambda'} \in \mathcal{P}$, if $P_\lambda \neq P_{\lambda'}$, then $P_\lambda \cap P_{\lambda'} = \emptyset$. This satisfies that for any $\omega, \omega' \in \Omega$ if $\Pi(\omega, X) \neq \Pi(\omega', X)$, then $\Pi(\omega, X) \cap \Pi(\omega', X) = \emptyset$, that is, $\omega' \notin \Pi(\omega, X)$. The contraposition is that if $\omega' \in \Pi(\omega, X)$, then $\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$. Hence, Π satisfies Stationarity.

(\Leftarrow) Suppose that Π satisfies Subjective Nondelusion and Stationarity. Given P_λ with $\Pi(\omega, X) = P_\lambda$ for some $\omega \in \Omega$. By Subjective Nondelusion and the assumption of projection, for any $\omega \in \Omega_X$, $\omega \in \Pi(\omega, X)$. Therefore, $\bigcup_{\omega \in \Omega_X} \Pi(\omega, X) = \bigcup_{\lambda: P_\lambda = \Pi(\omega, X)} P_\lambda = \Omega_X$ is evident, that is, Condition 1 in Definition 1 holds. By Subjective Nondelusion and the definition of P_λ , Condition 2 in Definition 1 holds. By Stationarity, for any $\omega, \omega' \in \Omega$, if $\Pi(\omega, X) \neq \Pi(\omega', X)$, then $\omega' \notin \Pi(\omega, X)$. That is, $\Pi(\omega, X) \cap \Pi(\omega', X) = \emptyset$. By the definition of P_λ , if $P_\lambda \neq P_{\lambda'}$, then $P_\lambda \cap P_{\lambda'} = \emptyset$. That is, Condition 3 in Definition 1 holds. Therefore, Π is partially partitional on Ω_X . ■

Heifetz et al. (2006) は五つの仮定を提案した。我々のモデルに於いて、そのうちの三つ—Confinedness, Generalized Reflexivity, Projections Preserve Awareness (PPA)—は Subjective Nondelusion と Stationarity から導くことができるが、Projective Preserve Ignorance (PPI) と Projections Preserve Knowledge (PPK) は導くことができない。従って、我々は PPI と PPK を仮定するかどうかを決める必要がある。但し、PPK を緩め、それを Partially Projections Preserve Knowledge

(部分的 PPK) と呼んだとき、部分的 PPK は Subjective Nondelusion と Stationarity から導くことができる。 $E \subseteq \Omega$ を与えたとき、任意の $X \subseteq P$ に対して、 $E_X = \{\omega_X \in \Omega \mid \omega \in E\}$, $E^X = \{\omega' \in \Omega \mid \forall \omega \in E \ \omega' = \omega \vee_{p \in Z: Z \subseteq X} p\}$ とする。このとき、上の性質は以下のように定式化され、示される。⁵

Remark 2 If a possibility correspondence Π satisfies Subjective Nondelusion and Stationarity, then it satisfies the following.

1. Confinedness: For any $\omega \in \Omega_X$ and any $X \subseteq P$, $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$.
2. Generalized Reflexivity: For any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$, $\omega \in (\Pi(\omega, X))^P$.
3. PPA: For any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$, if $\omega \in \Pi(\omega, X)$, then $\omega_X \in \Pi(\omega_X, X)$.
4. Partially PPK: For any $\omega \in \Omega$ and $X, Y \subseteq P$, if $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_Y$, then $(\Pi(\omega, X))_Y = \Pi(\omega_Y, X)$.

Proof. (Property 1) By Subjective Nondelusion, $\omega_X \in \Pi(\omega, X)$. By Stationarity, if $\omega' \in \Pi(\omega, X)$, then $\Pi(\omega', X) = \Pi(\omega, X)$. That is, $\omega'_X = \omega'$. Therefore, for any $\omega' \in \Pi(\omega, X)$, $\omega' \in \Omega_X$. Hence, $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$.

⁵ 初稿では Remark 2 の性質 4 を部分的 PPK ではなく、PPK と呼んだ。これは誤りである。但し、本稿は分割的 PPK と PPK を区別し、そこに違いはあるけれども、ある条件のもとではこの二つは同じである。Proposition 8 を見よ。

(Property 2) Given any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$. Then, $(\Pi(\omega, X))^P = \{\omega'' \in \Omega \mid \forall \omega' \in \Pi(\omega, X) \ \omega'' = \omega' \vee_{p \in Z: Z \subseteq X} p\}$. By Subjective Nondelusion, $\omega_X \in \Pi(\omega, X)$ and there exists $Z \subseteq X$ with $\omega = \omega_X \vee_{p \in Z} p$. Hence, $\omega \in (\Pi(\omega, X))^P$.

(Property 3) It is evident by Subjective Nondelusion.

(Property 4) Given $\omega \in \Omega$, $X, Y \subseteq P$ and $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_Y$. For any $\omega' \in \Pi(\omega, X)$, because $\omega' \in \Omega_Y$, $r_Y^X(\omega') = \omega'$. That is, $(\Pi(\omega, X))_Y = \Pi(\omega, X)$. Hence, by Subjective Nondelusion and Stationarity, $\Pi(\omega_Y, X) = \Pi(\omega_X, X) = \Pi(\omega, X)$. ■

我々のモデルでは、PPK と PPI が以下のように定式化される。

- (PPK) 任意の $\omega \in \Omega$, $X, Y \subseteq P$ ($Y \subseteq X$) にたいして、 $(\Pi(\omega, X))_Y = \Pi(\omega_Y, X)$;
- (PPI) 任意の $\omega \in \Omega$, $X, Y \subseteq P$ に対して、 $(\Pi(\omega, X))^P \subseteq (\Pi(\omega_Y, X))^P$.

これらは Subjective Nondelusion と Stationarity から導くことができない。以下はその例である。

Example 4 $P = \{x, y\}$ とする。このとき、 $\Omega = \{x \vee y, x, y, \phi\}$ となる。主体はすべての命題を認識できるものとする。すなわち $X = P$ とする。また、 $Y = \{x, \phi\}$ とし、 $\Pi(x \vee y, X) = \Pi(y, X) = \{x \vee y, y\}$, $\Pi(x, X) = \{x\}$, $\Pi(y, X) = \{y\}$ と仮定する。このとき、 $(\Pi(\omega, X)_{\omega=x \vee y, y})_Y = Y$ であるから、 $(\Pi(\omega, X)_{\omega=x \vee y, y})_Y \neq \Pi(x, X)$ かつ $(\Pi(\omega, X)_{\omega=x \vee y, y})_Y \neq \Pi(\phi, X)$ となる。すなわち、このケースでは PPK は満たされない。 ■

Example 5 $P = \{x, y, z\}$ とする。このとき、 $\Omega = \{x \vee y \vee z, x \vee y, y \vee z, z \vee x, x, y, z, \phi\}$ となる。主体は全ての基本命題を認識でき、一すなわち、 $X = P$ かつ $\Pi(x \vee y \vee z, P) = \Pi(x \vee y, P) = \{x \vee y \vee z, x \vee y\}$, $\Pi(y \vee z, P) = \Pi(z \vee x, P) = \Pi(x, P) = \{y \vee z, z \vee x, x\}$, $\Pi(y, P) = \Pi(z, P) = \{y, z\}$, $\Pi(\phi, P) = \{\phi\}$ と仮定する。この分割は Figure 4 に描かれる。このとき可能性対応は Subjective Nondelusion と Stationarity を満たす。ここで $Y = \{y\}$, $\omega = x \vee y$ とする。このとき、 $(\Pi(\omega, P))^P = \{x \vee y \vee z, x \vee y, y \vee z, z \vee x, x\}$, $(\Pi(\omega_Y, P))^P = (\Pi(\omega_Y, P))^P = \{x \vee y \vee z, x \vee y, y \vee z, z \vee x\}$ である。このとき、ある要素 $x \in (\Pi(\omega, P))^P \setminus (\Pi(\omega_Y, P))^P$ が存在するので、 $(\Pi(\omega, X))^P \not\subseteq (\Pi(\omega_Y, X))^P$ は明らかである。このケースは PPI を満たさない。■

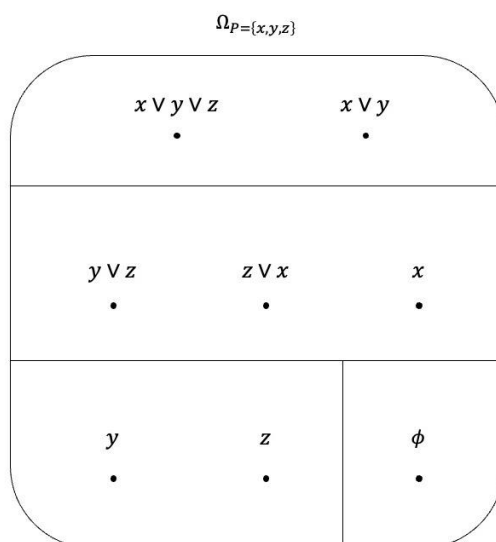


Fig. 4: Projections Preserve Ignorance is not satisfied.

上で議論した性質は以下の関係を導く。

Remark 3 The possibility correspondence Π satisfies the following properties.

- A) Generalized Reflexivity implies Subjective Nondelusion.
- B) PPK implies PPA.
- C) Partially PPK implies PPA

Proof. (A) Suppose that Π satisfies Generalized Reflexivity. Given any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$ with $\omega \in (\Pi(\omega, X))^P = \{\omega'' \in \Omega \mid \forall \omega' \in \Pi(\omega, X) \ \omega'' = \omega' \bigvee_{p \in Z: Z \subseteq X} p\}$. Then, there must exist $\omega' \in \Pi(\omega, X)$ such that $\omega = \omega' \bigvee_{p \in Z: Z \subseteq X} p$. That is, $r_X^Y(\omega) = r_X^Y(\omega' \bigvee_{p \in Z: Z \subseteq P} p) = \omega'$. Hence, $\omega_X \in \Pi(\omega, X)$.

(B) Suppose that Π satisfies Confinedness and PPK and that $\omega \in \Pi(\omega, X)$. Then, $\omega_X \in (\Pi(\omega, X))_X$. By PPK, because $(\Pi(\omega, X))_X = \Pi(\omega_X, X)$, $\omega_X \in \Pi(\omega_X, X)$.

(C) Suppose that Π satisfies Partially PPK and that for any $\omega \in \Omega$ and $X \subseteq P$, $\omega \in \Pi(\omega, X)$. Then, because $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$, $\omega = \omega_X \in (\Pi(\omega, X))_X$. By Partially PPK, because $(\Pi(\omega, X))_X = \Pi(\omega_X, X)$, $\omega_X \in \Pi(\omega_X, X)$. ■

Remark 3 の性質 (A), (B) は Heifetz et al. (2006) によって示されたけれども、(B) についての彼らのステートメントと我々のステートメントの間には差異が存在する。我々のステートメントとは対照的に、Heifetz et al. は Confinedness

と PPK は PPA を導くと述べている。Unawareness structure に於いて、Confinedness は必要であるのに対して、constructive Aumann structure では必要としない。

いくつかの先行研究は相互作用的状态に対して PPK と PPI について論じている, e.g., Heifetz et al. (2006, 2008), Galanis (2013, 2018)。対照的に我々のモデルは単一主体モデルであるから、上述の性質について仮定する必要はない。⁶

4.2 Knowledge Operator

次に知識演算子を定義する。事象 E は Ω の部分集合とする。主体が基本命題集合の部分集合 $X \subseteq P$ を認識できるとき、知識演算子 $K_X: 2^\Omega \rightarrow 2^\Omega$ は以下のように定義される。 $E \subseteq \Omega_X$ であるならば、 $K_X(E) = \{\omega \in \Omega \mid \Pi(\omega, X) \subseteq E\}$, そうでないならば、 $K_X(E) = \emptyset$ とする。 $K_X(E)$ は “ X を認識できる主体は事象 E を知っている” と解釈する。もし $K_X(E) = \emptyset$ ならば、主体が E を知っていることは偽となる。

Example 3 (Continued.) $X = \{x\}$, $\Pi(\omega_1, X) = \{\omega_2\}$, $\Pi(\omega_2, X) = \{\omega_2\}$,

⁶ Constructive Aumann structure は多属性非分割可能性対応モデルである。標準的な非分割モデルに於いて、PPK と PPI は仮定していないように見える。本稿は複数主体の constructive Aumann structure に於いても PPK と PPI は必要ないものと推測する。

$\Pi(\omega_3, X) = \{\omega_4\}$, $\Pi(\omega_4, X) = \{\omega_4\}$ と仮定する。 $E_1 = \{\omega_2\}$ とする。このとき、 $E_1 \subseteq \Omega_X$ かつ $\Pi(\omega_2, X) \subseteq E_1$ である。従って、 $K_X(E_1) = \{\omega_2\}$ であり、主体は E_1 を知っている。 $E_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ と置く。このとき、 $E_2 \not\subseteq \Omega_X$ であるから、 $K_X(E_2) = \emptyset$ である。これは主体が E_2 を知っていることは偽であることを意味する。■

知識演算子の定義の中で、 $E \subseteq \Omega_X$ は重要である。 $X \neq P$ のとき $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega$ は明らかである。従って、すべての E に対して $K_X(E) = \{\omega \in \Omega \mid \Pi(\omega, X) \subseteq E\}$ ならば、 $K_X(\Omega)$ は非空となり、主体は Ω を知ることとなる。⁷ なお、ある $E \subseteq \Omega_X$ に対して、 $K_X(E)$ は空かもしれない。

Remark 4 Given $E \subseteq \Omega_X$, the following are equivalent.

1. For any $\omega \in \Omega$, $\Pi(\omega, X) \not\subseteq E$.
2. $K_X(E) = \emptyset$.

Example 3 (Continued.) $E_3 = \{\omega_4\}$ とする。このとき、 $\Pi(\omega_2, X) \not\subseteq E_3$ であるから、 $K_X(E_3) = \emptyset$ となる。すなわち ω_2 で主体が E_3 を知っていることは偽である。■

$K_X(E)$ は Ω_X 上の事象であることは明らかである。

⁷ In this case, Monotonicity is satisfied even if $X \neq P$.

Proposition 2 (Heifetz et al. 2006) For any $E \subseteq \Omega$, $K_X(E) \subseteq \Omega_X$.

Proof. Given any $E \subseteq \Omega$ and $\omega \in K_X(E)$. By the definition of knowledge operator and Subjective Nondelusion, $\omega \in \Pi(\omega, X) \subseteq E$. Then, by Confinedness, as $\Pi(\omega, X) \subseteq \Omega_X$, $\omega \in \Omega_X$. Therefore, $K_X(E) \subseteq \Omega_X$. ■

$\neg K_X(E) = \Omega \setminus K_X(E)$ を $K_X(E)$ の否定とする。これは “ X を認識している主体は事象 E を知らない” と解釈する。ここで我々は Heifetz et al. (2006) における知識演算子の性質を一般化することができる。

Proposition 3 A knowledge operator K_X has the following properties.

K1 (Necessitation) $X = P$ if and only if $K_X(\Omega) = \Omega$.

K2 (Monotonicity) $X = P$ if and only if $E \subseteq F \Rightarrow K_X(E) \subseteq K_X(F)$.

K3 (Conjunction) $\forall \lambda \in \Lambda \ E_\lambda \subseteq \Omega_X$ or $\forall \lambda \in \Lambda \ E_\lambda \not\subseteq \Omega_X \Rightarrow K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda)$.

K4 (Truth) $K_X(E) \subseteq E$.

K5 (Positive Introspection) $K_X(E) = K_X K_X(E)$.

K6 (Negative Introspection) $X = P$ if and only if $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$.

Proof. (K1) (\Rightarrow) When $X = P$, by Subjective Nondelusion, for any $\omega \in \Omega$, $\omega \in$

$\Pi(\omega, P) \subseteq \Omega$. That is, $\Omega \subseteq K_P(\Omega)$. Moreover, by Proposition 2, because $K_P(E) \subseteq \Omega$, $K_P(\Omega) = \Omega$.

(\Leftarrow) Suppose that $K_X(\Omega) = \Omega$. Assume that $X \neq P$. Then, $\Omega_X \subsetneq \Omega$. However, by the definition of the knowledge operator, $K_X(\Omega) = \emptyset$. This is a contradiction.

Therefore, $X = P$.

(K2) (\Rightarrow) When $X = P$, $K_P(E) = \{\omega \in \Omega \mid \Pi(\omega, P) \subseteq E\} \subseteq \{\omega \in \Omega \mid \Pi(\omega, P) \subseteq F\} = K_P(F)$.

(\Leftarrow) Suppose that $E \subseteq F \Rightarrow K_X(E) \subseteq K_X(F)$. Assume that $X \neq P$. Then, $\Omega_X \subsetneq \Omega$ and $K_X(\Omega) = \emptyset$. For any $\emptyset \neq E \subseteq \Omega_X$, because $K_X(E) \supsetneq K_X(\Omega)$, this is a contradiction. Therefore, $X = P$.

(K3) Given any $\lambda \in \Lambda$, suppose that $E_\lambda \subseteq \Omega_X$. Given any $\omega \in K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)$. Then, $\Pi(\omega, P) \subseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda$. This means that for any $\lambda \in \Lambda$, $\Pi(\omega, P) \subseteq E_\lambda$. That is, for any $\lambda \in \Lambda$, because $\omega \in K_X(E_\lambda)$, $\omega \in \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda)$. For any $\lambda \in \Lambda$, suppose that $E_\lambda \not\subseteq \Omega_X$. Then, $K_X(E_\lambda) = \emptyset$. That is, $K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda) = \emptyset$.

(K4) Given any $\omega' \in K_X(E)$, $\omega' \in \Pi(\omega, P) \subseteq E$. Therefore, $K_X(E) \subseteq E$.

(K5) By K4, $K_X K_X(E) \subseteq K_X$. Given any $\omega \in K_X(E)$, $\Pi(\omega, P) \subseteq E$. Here, for any $\omega' \in \Pi(\omega, P)$, $\Pi(\omega', P) \subseteq E$. Thus, $\omega' \in K_X(E)$. Hence, because $\Pi(\omega, P) \subseteq K_X(E)$, $\omega' \in K_X K_X(E)$. Thus, $K_X(E) \subseteq K_X K_X(E)$. Hence $K_X(E) = K_X K_X(E)$.

(K6) (\Rightarrow) Assume that $X = P$. Given any $\omega \in \neg K_P(E)$, $\omega \notin K_P(E)$. Thus, $\Pi(\omega, P) \not\subseteq E$. Given $\omega' \in \Pi(\omega, P)$, by Stationarity, because $\Pi(\omega, P) = \Pi(\omega', P)$, $\omega' \in \neg K_P(E)$. That is, $\Pi(\omega, P) \subseteq \neg K_P(E)$. Therefore, $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$.

(\Leftarrow) Suppose that $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$ and $X \neq P$. Then, $K_X(E) \subseteq \Omega_X \subsetneq \Omega$.

Because $\neg K_X(E) \not\subseteq \Omega_X$, this must be $K_X \neg K_X(E) = \emptyset$. This is a contradiction.

Therefore, $X = P$. ■

我々のモデルに於いて、知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Negative Introspection が成り立つことと主体が P の全ての命題を認識できることは同値である。

Remark 5 $K_X(\Omega_X) = \Omega_X$.

この Remark は明らかであるけれども、 X を認識できる主体は Ω_X に基づく Aumann structure に直面していると信じている。従って、我々が Ω_X に限定した可能性対応を定義したならば、我々は Ω_X 上で標準的な知識演算子を定義することができる。

最後に Heifetz et al. (2006) が示した以下の命題を示す。

Proposition 4 (HMS 2006) $\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X \neg K_X \neg K_X(E)$.

Proof. See each property 2 in Propositions 5–7 below. ■

4.3 Awareness/Unawareness Operator

本節に於いて、我々は unawareness 演算子を定義する。主体は X を認識できると仮定する。このとき、unawareness 演算子は $U_X(E) = \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E)$ と定義され、awareness 演算子は $A_X(E) = \neg U_X(E) = K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E)$ と定義される。

Example 3 (Continued.) $E_1 = \{\omega_2\}$ に対して、 $\neg K_X(E_1) = \{\omega_1, \omega_3, \omega_4\}$ かつ $\neg K_X \neg K_X(E_1) = \emptyset$ であるから、 $U_X(E_1) = \emptyset$ である。従って、 $A_X(E_1) = \{\omega_2, \omega_4\}$ が成り立つ。対照的に $E_2 = \{\omega_1, \omega_2\}$ に対して、 $\neg K_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ かつ $\neg K_X \neg K_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ であるから、 $U_X(E_2) = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4\}$ かつ $A_X(E_2) = \emptyset$ が成立する。■

知識演算子と awareness/unawareness 演算子について議論する前に、我々は次の三つのケースについて考察しなくてはならない。主体が全ての基本命題を認識できる場合；主体は基本命題のある非空な部分集合を認識できないが、対象となる事象が主体の認識できる状態空間上にある場合；主体は一部の基本命題について認識できないだけでなく、対象となる事象が主体が認識できる状態空間上にない場合である。

Awareness/unawareness 演算子の性質について示す前に以下の補題を導く。

Lemma 3 (Heifetz et al. 2006) $E, F \subseteq \Omega_X \implies K_X(E \cup K_X(F)) = K_X(E) \cup K_X(F)$.

Proof. First, given any $\omega \in K_X(E \cup K_X(F))$. Then, $\Pi(\omega, X) \subseteq E \cup K_X(F)$. This means that $\Pi(\omega, X) \subseteq E$ or $\Pi(\omega, X) \subseteq K_X(F)$. Hence, by K5, because $K_X(F) = K_X K_X(F)$, $K_X(E) \cup K_X K_X(F) = K_X(E) \cup K_X(F)$, and $\omega \in K_X(E) \cup K_X(F)$. That is, $K_X(E \cup K_X(F)) \subseteq K_X(E) \cup K_X(F)$. Next, given any $\omega \in K_X(E) \cup K_X(F)$. By K5, $K_X(E) \cup K_X(F) = K_X(E) \cup K_X K_X(F)$. Then, $\Pi(\omega, X) \subseteq E$ or $\Pi(\omega, X) \subseteq K_X(F)$. This means that $\Pi(\omega, X) \subseteq E \cup K_X(F)$. Therefore, because $\omega \in K_X(E \cup K_X(F))$, $K_X(E) \cup K_X(F) \subseteq K_X(E \cup K_X(F))$. Thus, $K_X(E \cup K_X(F)) = K_X(E) \cup K_X(F)$. ■

Lemma 4 An awareness operator has the following properties.

1. (Triviality) If $X = P$, then $A_X(E) = \Omega$.
2. (Non-triviality) If $X \neq P$ and $E \subseteq \Omega_X$, then $A_X(E) = K_X(E)$.
3. (Non-triviality) If $X \neq P$ and $E \not\subseteq \Omega_X$, then $A_X(E) = \emptyset$.

Proof. (1) Suppose that $X = P$. Then, $A_P(E) = K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E)$. By K5, $K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E) = K_P K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E)$. By Lemma 3, $K_P K_P(E) \cup K_P \neg K_P(E) = K_P(K_P(E) \cup \neg K_P(E)) = K_P(\Omega) = \Omega$. Therefore, $A_P(E) = \Omega$.

(2) Suppose that $X \neq P$ and $E \subseteq \Omega_X$. Then, by Proposition 2, because $K_X(E) \subseteq \Omega_X$, $\neg K_X(E) \not\subseteq \Omega_X$. Therefore, $K_X \neg K_X(E) = K_X(\emptyset) = \emptyset$. Thus, $A_X(E) = K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E) = K_X(E)$.

(3) Suppose that $X \neq P$ and $E \not\subseteq \Omega_X$. Then, by the definition of the knowledge operator, $K_X(E) = \emptyset$. Then, $\neg K_X(E) = \Omega$ and $K_X(\Omega) = \emptyset$. Therefore, $A_X(E) =$

$$K_X(E) \cup K_X \neg K_X(E) = \emptyset. \blacksquare$$

知識演算子の性質と awareness/unawareness 演算子の性質は以下のように示される。

Proposition 5 When $X = P$, the following properties of knowledge and awareness/unawareness are obtained:

- ① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.
- ② AU Introspection: $U_X(E) = U_X U_X(E)$.
- ③ Weak Necessitation: $A_X(E) = K_X(\Omega_X)$.
- ④ Strong Plausibility: $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E)$.
- ⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.
- ⑥ Symmetry: $A_X(\neg E) = A_X(E)$.
- ⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
- ⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.
- ⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.
- ⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. Assume that $X = P$. By condition 1 in Lemma 4, $A_X(E) = \Omega$, i.e., $U_X(E) = \emptyset$.

$$1) \quad K_X U_X(E) = K_X(\neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E)) = K_X \neg K_X(E) \cap K_X \neg K_X \neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) = \emptyset.$$

- 2) By condition 1 in Lemma 4, because $A_X(E) = \Omega$ and $U_X(E) = \neg A_X(E) = \emptyset$,
 $A_X U_X(E) = A_X(\emptyset) = K_X(\emptyset) \cup K_X \neg K_X(\emptyset) = \emptyset \cup K_X(\Omega) = \Omega$. Therefore,
 $A_X(E) = A_X U_X(E)$ and $U_X(E) = U_X U_X(E)$.
- 3) By $X = P$, $K_X(\Omega) = \Omega$. By Lemma 4, because $A_X(E) = \Omega$, $A_X(E) = K_X(\Omega)$.
- 4) By Lemma 4, $U_X(E) = \neg A_X(E) = \emptyset$. By Lemma 4 and AU Introspection,
 $U_X(E) = U_X U_X(E) = \emptyset$ and $U_X U_X U_X(E) = U_X(\emptyset)$. Then, as $A_X(\emptyset) = \Omega$,
 $U_X U_X U_X(E) = U_X(\emptyset) = \emptyset$. By repeating it, $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E)$.
- 5) $A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E) \cup K_X \neg K_X \neg K_X(E) = K_X K_X \neg K_X(E) \cup$
 $K_X \neg K_X \neg K_X(E) = K_X(K_X \neg K_X(E) \cup \neg K_X \neg K_X(E)) = K_X(\Omega) = \Omega$. Therefore,
 $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = \neg K_X(E) \cap \Omega = \neg K_X(E)$. By $X = P$, the knowledge
operator satisfies K6, i.e., $\neg K_X(E) \subseteq K_X \neg K_X(E)$. Moreover, by K4,
 $K_X \neg K_X(E) \subseteq \neg K_X(E)$. Therefore, as $\neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$, $\neg K_X(E) \cap$
 $A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.
- 6) Given $E \subseteq \Omega$, because $A_X(E) = \Omega$, $A_X(\neg E) = \Omega$. Hence, $A_X(\neg E) = A_X(E)$.
- 7) For any $E \subseteq \Omega$ and any $\lambda \in \Lambda$, as $A_X(E) = \Omega$, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \Omega$ and
 $A_X(E_\lambda) = \Omega$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) = \Omega$. Therefore, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
- 8) Given $E \subseteq \Omega$, because $A_X(E) = \Omega$, $A_X K_X(E) = \Omega$. Thus, $A_X K_X(E) =$
 $A_X(E)$.
- 9) Given $E \subseteq \Omega$, because $A_X(E) = \Omega$, $A_X A_X(E) = \Omega$. Thus, $A_X A_X(E) =$
 $A_X(E)$.
- 10) For any $E \subseteq \Omega$, because $A_X(E) = \Omega$, $K_X A_X(E) = K_X(\Omega)$. By K1, $K_X(\Omega) =$

Ω . Therefore, $K_X A_X(E) = A_X(E)$. ■

Proposition 6 When $X \neq P$ and $E \subseteq \Omega_X$, the following properties of knowledge and awareness/unawareness are obtained:

- ① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.
- ② AU Introspection: $U_X(E) \subseteq U_X U_X(E)$.
- ③ Weak Necessitation: $A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.
- ④ Strong Plausibility: $U_X(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E)$.
- ⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.
- ⑥ Reverse Symmetry: $A_X(\neg E) \subseteq A_X(E)$.
- ⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
- ⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.
- ⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.
- ⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. Suppose that $X \neq P$ and that for any $E \subseteq \Omega$, $E \subseteq \Omega_X$. Then, by Condition 2 in Lemma 4, $A_X(E) = K_X(E)$. Therefore, $U_X(E) = \neg K_X(E)$.

- 1) By $A_X(E) = K_X(E)$, $U_X(E) = \neg K_X(E)$. By Proposition 2, because $K_X(E) \subseteq \Omega_X$, $\neg K_X(E) \not\subseteq \Omega_X$. Therefore, $K_X(\neg K_X(E)) = \emptyset$.
- 2) $U_X(E) = \neg K_X(E) \subseteq \Omega$. $U_X U_X(E) = \neg K_X U_X(E)$. By KU Introspection, because $K_X U_X(E) = \emptyset$, $\neg K_X U_X(E) = \Omega$. Therefore, $U_X(E) \subseteq U_X U_X(E)$.

- 3) As $A_X(E) = K_X(E)$ by Condition 2 in Lemma 4 and $K_X(\Omega_X) = \Omega_X$ by Remark 5, $A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.
- 4) By AU Introspection, $U_X U_X(E) = \neg K_X U_X(E) = \Omega$. $U_X U_X U_X(E) = U_X \neg K_X U_X(E) = U_X(\Omega) = \neg K_X(\Omega)$. By the definition of the knowledge operator, because $K_X(\Omega) = \emptyset$, $U_X(\Omega) = \Omega$. By repetition, $\bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E) = \Omega$. Therefore, $U_X(E) \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E)$.
- 5) By Condition 2 in Lemma 4, $A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$. By K4, because $K_X(E) \subseteq E \subseteq \Omega_X$, $\neg K_X(E) \not\subseteq \Omega_X$. Therefore, $K_X \neg K_X(E) = \emptyset$. Thus, $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = \neg K_X(E) \cap \emptyset = \emptyset = K_X \neg K_X(E)$.
- 6) $A_X(\neg E) = K_X(\neg E) \cup K_X \neg K_X(\neg E)$. By $E \subseteq \Omega_X$, $\neg E \not\subseteq \Omega_X$. Therefore, $K_X(\neg E) = \emptyset$. By $\neg K_X(\neg E) = \Omega$, $K_X \neg K_X(\neg E) = \emptyset$. Therefore, $A_X(\neg E) = \emptyset$. By Condition 2 in Lemma 4, because $A_X(E) = K_X(E)$, $A_X(\neg E) \subseteq A_X(E)$.
- 7) For any $E \subseteq \Omega_X$, because $A_X(E) = K_X(E)$, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = K_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda)$. Moreover, for any $\lambda \in \Lambda$, because $A_X(E_\lambda) = K_X(E_\lambda)$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} K_X(E_\lambda)$. Therefore, by K3, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
- 8) For any $E \subseteq \Omega_X$, by K4, $K_X(E) \subseteq E$. Therefore, by $A_X K_X(E) = K_X K_X(E)$, $K_X K_X(E) = K_X(E)$. Thus, $A_X K_X(E) = A_X(E)$.
- 9) For any $E \subseteq \Omega_X$, by K4, as $K_X(E) \subseteq E$. $A_X(E) = K_X(E)$, $A_X A_X(E) = A_X K_X(E) = K_X K_X(E) = K_X(E)$. Therefore, $A_X A_X(E) = A_X(E)$.
- 10) For any $E \subseteq \Omega_X$, because $A_X(E) = K_X(E)$, $K_X A_X(E) = K_X K_X(E) = K_X(E)$. Therefore, $K_X A_X(E) = A_X(E)$. ■

Proposition 7 When $X \neq P$ and $E \not\subseteq \Omega_X$, the following properties of knowledge and awareness/unawareness are obtained:

- ① KU Introspection: $K_X U_X(E) = \emptyset$.
- ② AU Introspection: $U_X(E) = U_X U_X(E)$.
- ③ Weak Necessitation: $A_X(E) \subseteq K_X(\Omega_X)$.
- ④ Strong Plausibility: $U_X(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n(E)$.
- ⑤ Weak Negative Introspection: $\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E)$.
- ⑥ Reverse Symmetry: $A_X(\neg E) \supseteq A_X(E)$.
- ⑦ A-Conjunction: $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.
- ⑧ AK-Self Reflection: $A_X K_X(E) = A_X(E)$.
- ⑨ AA-Self Reflection: $A_X A_X(E) = A_X(E)$.
- ⑩ A-Introspection: $K_X A_X(E) = A_X(E)$.

Proof. Suppose that $X \neq P$ and that for any $E \subseteq \Omega$, $E \not\subseteq \Omega_X$. By Condition 3 in Lemma 4, $A_X(E) = \emptyset$. Therefore, $U_X(E) = \Omega$.

- 1) $K_X U_X(E) = K_X(\Omega) = \emptyset$.
- 2) Because $U_X U_X(E) = U_X(\Omega)$. $\Omega \not\subseteq \Omega_X$ is evident, $U_X(\Omega) = \Omega$. Therefore, as $U_X U_X(E) = \Omega$, $U_X(E) = U_X U_X(E)$.
- 3) By Remark 5, $A_X(E) = \emptyset \subseteq \Omega_X = K_X(\Omega_X)$.
- 4) By AU Introspection, $U_X U_X U_X(E) = U_X(\Omega) = \Omega$. By repetition, $U_X(E) =$

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K_X)^n (E).$$

5) By $E \not\subseteq \Omega_X$, because $K_X(E) = \emptyset$, $\neg K_X(E) = \Omega$. $K_X \neg K_X(E) = K_X(\Omega) = \emptyset$.

Therefore, because $A_X \neg K_X(E) = A_X(\Omega) = K_X(\Omega) \cup K_X \neg K_X(\Omega) = \emptyset$,

$$\neg K_X(E) \cap A_X \neg K_X(E) = K_X \neg K_X(E).$$

6) Because $A_X(E) = \emptyset$, $A_X(\neg E) \supseteq A_X(E)$.

7) For any $E \not\subseteq \Omega_X$, as $A_X(E) = \emptyset$, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \emptyset$. Moreover, for any $\lambda \in \Lambda$,

because $A_X(E_\lambda) = \emptyset$, $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) = \emptyset$. Hence, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda) = \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda)$.

8) Because $K_X(E) = \emptyset$, $A_X K_X(E) = A_X(\emptyset) = K_X(\emptyset) \cup K_X \neg K_X(\emptyset) = \emptyset \cup$

$$K_X(\Omega) = \emptyset. \text{ Therefore, } A_X K_X(E) = A_X(E).$$

9) $A_X A_X(E) = A_X(\emptyset) = \emptyset$. Therefore, $A_X A_X(E) = A_X(E)$.

10) $K_X A_X(E) = K_X(\emptyset) = \emptyset$. ■

Remark 6 Suppose $X \neq P$. For any $\lambda \in \Lambda$, let $E_\lambda \subseteq \Omega_X$, and for any $\delta \in \Delta$, let $E_\delta \not\subseteq \Omega_X$. Then, $A_X(\bigcap_{\lambda \in \Lambda} E_\lambda \bigcap_{\delta \in \Delta} E_\delta) \supseteq \bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) \bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$.

KU Introspection, AU Introspection, Weak Necessitation, Strong Plausibility は Dekel et al. (1998) によって ; Symmetry, A-Conjunction, AK-Self Reflection, AA-Self Reflection は Modica and Rustichini (1999) によって ; Weak Negative Introspection, Symmetry, A-Conjunction, AK-Self Reflection, AA-Self Reflection は Halpern (2001) によって ; A-Introspection は Heifetz et al. (2006) によって提案された。しかしながら、 $X \neq P$ かつ $E \subseteq \Omega_X$ で、AU Introspection, Strong

Plausibility は等号を満たさないかもしれない。さらに $X \neq P$ かつ $E \notin \Omega_X$ で、Weak Necessitation は等号を満たさないかもしれない。さらに A-Conjunction は全ての事象が $E \subseteq \Omega_X$ または $E \notin \Omega_X$ の場合にのみ成立する。Remark 6 は、その条件を満たさないならば、 $\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_X(E_\lambda) \cap \bigcap_{\delta \in \Delta} A_X(E_\delta)$ は空かもしれないことを示す。

興味深いことに、Symmetry は Non-triviality は衝突する。Awareness/unawareness 演算子の性質を議論する先行研究は Symmetry を証明するか (e.g., Heifetz et al. 2006, 2013a, Li 2009)、それを仮定していた (e.g., Modica and Rustichini 1994, 1999, Halpern 2001, Heifetz et al. 2008, Sadzik 2021)。対照的に awareness/unawareness 演算子が non-trivial であるとき、Symmetry は成立しない。Fukuda (2020) は Symmetry が無限の高階の unawareness が成立しないかもしれないことを示したが、2 階の無知—すなわち 1 階の unawareness—については Symmetry が成立することを示した。従って、我々はこの性質を Reverse Symmetry とした。さらに、Reverse Symmetry の包含関係は $E \subseteq \Omega_X$ または $E \notin \Omega_X$ で異なる。

証明が示すように、主体が基本命題の一部を認識できないとき、知識演算子の定義より、主体が E を知っているならば、 E の反対事象は主体の主観的状态空間上に存在しないので、主体はその反対事象を認識することはできない。従って、 E についての知識演算子の反対事象は空となる。 E が主体の主観的状态空間上にないとき、 $K_X(E) = \emptyset$ かつその反対事象 (i.e., $\neg E$ かつ $\neg K_X(E)$) は空かもしれないし、そうでないかもしれない。従って、主体はそれらを認識

できるかできないかである。

Reverse Symmetry の特徴は重要であり、少なくとも二つの含意をもつ。一つは主体が認識している事象と主体が認識できないその反対事象についてその関係を議論すべきでないことを示す。もう一つの含意は様相論理と関連付けられる。Modica and Rustichini (1994) は S4 かつ Symmetry が成り立つとき、S5 が成り立つことを示した。対照的に我々のモデルに於いて、Symmetry と Non-triviality は両立しない。従って Reverse Symmetry は unawareness に関する議論の中で、S5 を取り除くべきことを示唆しているのかもしれない。我々は様相論理の中で、S4 + Reverse Symmetry を議論すべきである。

最後に本節に於いて、我々は Awareness Leads to Knowledge とその逆の包含について議論する。Galanis (2013) は以下の性質 (Awareness Leads to Knowledge) を提案した。任意の $X, Y \subseteq P$ ($Y \subseteq X$) と $E \subseteq \Omega$ に対して、 $E \subseteq \Omega_Y$ ならば、 $K_Y(E) \subseteq (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$ が成立する。彼は unawareness structure に於いて、PPK を仮定しなければ、逆の包含は成立しないかもしれないことを示唆した。しかしながら、constructive Aumann structure に於いて、Awareness Leads to Knowledge は成立せず、PPK を仮定していないにもかかわらず、その逆の包含が成立する。⁸

⁸ 初稿に於いて、Proposition 8 のステートメントと証明は誤っていた。初稿では等号が成り立つとしたが、正しくない。本稿に於いてステートメントと証明は等号も Awareness Leads to Knowledge も成り立たないことを示してい

Proposition 8 For any $X, Y \subseteq P$ with $Y \subseteq X$ and $E \subseteq \Omega$, if $E \subseteq \Omega_Y$, then $K_Y(E) \supseteq (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$.

Proof. Suppose that for any $X, Y \subseteq P$, $Y \subseteq X$ and given $E \subseteq \Omega_Y$. Firstly, suppose that $Y = P$, i.e., $X = P$. Then, $A_Y(E) = \Omega$ by Condition 1 of Lemma 4, and $(K_X(E))_Y = (K_Y(E))_Y = K_Y(E)$ because $K_Y(E) = K_X(E) = K_P(E)$. Therefore, $K_Y(E) = (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$. Next, suppose that $Y \neq P$. Then, by Condition 2 of Lemma 4, $K_Y(E) = A_Y(E)$. Because $A_Y(E) \supseteq (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$, $K_Y(E) \supseteq (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$.

When $Y \neq P$, $K_Y(E) \subseteq (K_X(E))_Y \cap A_Y(E)$ may not hold. Suppose that $\Pi(\omega, Y) \subseteq E$. Then, $K_Y(E) \neq \emptyset$. Assume that $\Pi(\omega, X) \not\subseteq E$ for any $\omega \in \Omega$. Then, $K_X(E) = \emptyset$ by Remark 4. Then, $\emptyset = K_X(E) = K_X(E) \cap A_Y(E) = (K_X(E))_Y \cap A_Y(E) \subseteq K_Y(E)$. ■

本稿は PPK を仮定していない。しかし Awareness Leads to Knowledge は成立しなかった。Proposition 8 は Awareness Leads to Knowledge の逆の包含を導いている。この結果は Galanis (2013) とは対照的な結果である。なお、等号が成立しないことの必要十分条件は、主体が基本命題の一部に unaware であり、

る。

かつ主体が認識している状態空間の延長上の知識演算子を捉えられないことである。Awareness Leads to Knowledge の逆は、主体が unaware であるような状態空間上の (部分的) 分割に aware であることはできないことを意味する。Galanis と本稿の結果の違いは constructive Aumann structure の特徴は unawareness structure の特徴と異なることを意味する。これは我々のモデルは Gakanis の議論と合わないことを意味する。

Proposition 8 は部分的 PPK を包含している。Proposition 8 は任意の $\omega \in K_X(E)$ に対して、 $\Pi(\omega, X) \subseteq E \subseteq \Omega_Y$ であることを導く。同様に任意の $\omega \in K_Y(E)$ に対して、 $\Pi(\omega, Y) \subseteq E \subseteq \Omega_Y \subseteq \Omega_X$ であることを導く。これらのステートメントは部分的 PPK の条件である。これは Proposition 8 のもとで PPK のステートメントが満たされることを意味する。しかしながら、等号は成り立たないかもしれない。等号と Awareness Leads to Knowledge は仮定を緩めた Galanis (2013) とは対照的に、追加の仮定で強める必要がある。

4.4 Relationships with Standard Aumann Structure

我々のモデルに於いて、 $X = P$ のとき、unawareness が trivial になるという Dekel et al. (1998) の主要定理が以下のように成り立つ。

Theorem 1 In any constructive Aumann structure, the following are equivalent.

1. $X = P$.
2. For any $E \subseteq \Omega$, $U_X(E) = \emptyset$.

3. For any $E, F \subseteq \Omega$, $E \subseteq F$, $U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$.

Proof. (1 \Rightarrow 2) It is evident by Condition 1 in Lemma 4.

(2 \Rightarrow 3) Given $E \subseteq \Omega$, $U_X(E) = \emptyset$. Then, for any $F \subseteq \Omega$, $\emptyset = U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$.

(3 \Rightarrow 1) Suppose that for every $E, F \subseteq \Omega$, if $E \subseteq F$, then $U_X(E) \subseteq \neg K_X(F)$. Here, assume that $X \neq P$ and given $E = \emptyset$ and $\emptyset \neq F \subseteq \Omega_X$. Then, because $\neg K_X(\emptyset) = \Omega$ and $K_X(\Omega) = \emptyset$, $U_X(\emptyset) = \neg K_X(E) \cap \neg K_X \neg K_X(E) = \Omega \cap \neg K_X(\Omega) = \Omega \cap (\Omega \setminus K_X(\Omega)) = \Omega$. Because $\neg K_X(F) \subsetneq \Omega$ is evident, $\neg K_X(F) \subsetneq U_X(\emptyset)$. This is a contradiction. Hence, $X = P$. ■

Dekel et al. (1998) は unawareness 演算子が Plausibility, AU Introspection, KU Introspection を満たし、かつ知識演算子が Necessitation を満たすならば、unawareness は trivial なものになることを示した。また unawareness 演算子が上の仮定を満たすもとで、知識演算子が Monotonicity を満たすならば、主体は全てに unaware であることを示した。我々のモデルに於いて、 $X = P$ のとき、我々は知識演算子と unawareness 演算子が上の性質を満たすことを示した。従って、主要定理は $X = P$ のときに成立し、逆もまた成立する。

Chen et al. (2012) は知識演算子が Necessitation を満たし、かつ unawareness 演算子が Plausibility を満たすならば、Negative Introspection は AU Introspection と KU Introspection が同値である。また上の仮定のほか、Monotonicity と Truth が満たされているならば、Negative Introspection は AU

Introspection と同値である。我々のモデルに於いて、 $X = P$ のとき、Negative Introspection と AU Introspection はどうちであった。さらに、Modica and Rustichini (1994) は Negative Introspection と Symmetry が同値であることを示した。従って、我々は Chen et al. (2012) と Modica and Rustichini (1994) の主要定理を以下のように一般化することができる。

Theorem 2 In any constructive Aumann structure, the following are equivalent.

1. $X = P$.
2. Negative Introspection if and only if AU Introspection if and only if Symmetry.

Proof. (1 \Rightarrow 2) Suppose that $X = P$. Then, by Proposition 3, Negative Introspection holds. Moreover, by Proposition 5, AU Introspection and Symmetry hold.

(2 \Rightarrow 1) Suppose that Negative Introspection, AU Introspection and Symmetry are equivalent. Here, assume that $X \neq P$. Then, by Proposition 3, Negative Introspection does not hold, and by Proposition 6 and Proposition 7, Symmetry does not hold. However, by Proposition 6 and Proposition 7, AU Introspection holds. This contradicts that the three properties are equivalent. Therefore, $X = P$. ■

最後に我々は Fukuda (2020) との関係について考察しよう。彼は non-trivial unawareness は非分割的状态空間モデル上で議論することができることと、Necessitation と AU Introspection は両立しないことを示した。従って、彼が指

摘したように、Necessitation が満たされるもとで AU Introspection が成り立たないならば、non-trivial unawareness を議論することができる。また、AU Introspection の代わりとして Reverse AU Introspection ($U_X(E) \supseteq U_X U_X(E)$) を提案した。彼は以下の二点を指摘した。一つは AU Introspection は non-trivial unawareness の議論に必要がないこと；そしてもう一つは AU Introspection が成立しないならば、(非分割的) 状態空間モデルは awareness of unawareness を表現することができることである。対照的に我々のモデルでは、包含関係の等号が成立しないとき、我々のモデルに於いて、Reverse AU Introspection と Non-triviality が成立しない。主体が基本命題の一部を認識できないにもかかわらず、我々のモデルは AU Introspection を導かなくてはならない。この違いは Fukuda (2020) と本稿との間に異なる特徴が存在することを意味する。

5. Conclusion

本稿は状態空間が完備束であるような constructive Aumann structure について議論した。Heifetz et al. (2006), Li (2009) とは対照的に、我々のモデルでは互いに素な状態空間の集合族は必要としない。しかしながら、標準的な状態空間も絵 d のケースとは異なり、我々のモデルは Heifetz et al. と Li のモデルのように多属性モデルである。但し、我々のモデルに於いて、異なる状態空間上の同じ状態は、異なる属性をもつ。これは各主観的状态空間に於ける状態の性質は状態空間上の他の状態との関係に依存する。

我々のモデルは単一主体モデルであり、高階認識については議論しなかった。

しかしながら、我々の結論は Proposition 6-7 と Remark 6 で示したように、先行研究での結論と異なる。多主体モデルや高階認識に於いて、他の性質が成立しないかもしれない。

特に、Symmetry と non-trivial unawareness の両立は不可能である。先行研究はこの性質を証明するかもしれないと仮定していたのに対して、本研究では Symmetry と Non-triviality の両立不可能性を証明した。我々が獲得した結果 (Reverse Symmetry) の含意は、主体が認識することができる事象と主体が認識することができない反対事象との関係を議論すべきではないということと、unawareness を議論するとき、様相論理に於ける S5 は取り除かなければならないということである。

対照的に、constructive state space, HMS-state space, Li-state space は同値であり、かつ我々は Dekel et al. (1998) の結果の一般化である Theorem 1 と Chen et al. (2012) の結果の一般化である Theorem 2 を証明した。これは我々のモデルが Heifetz et al. (2006) と Li (2009) の unawareness structure と非分割的状態空間モデルの中間に位置することを意味する。

先行研究には、unawareness を伴った選択理論 (e.g., Karni and Vierø 2013, 2017, Piermont 2017) ; unawareness を伴った相互作用的状态 (e.g., Auster 2013, Heifetz et al. 2013a, and Galanis 2013, 2018) ; games with unawareness (e.g., Heifetz et al. 2013b, Halpern and Rêgo 2014, Perea 2018, and Feinberg 2020) がある。今後の研究課題として、完備束を伴った Aumann structure を導入すべきであろう。例えば、我々のモデルを Bayesian game with unawareness へと適用する方

法が挙げられる。Sadzik (2021), Meier and Schipper (2014) は Bayesian game with unawareness を議論した。Sadzik は Heifetz et al. (2006) のモデルに基づいて確率的信念について議論し、normal-form game with unawareness に於けるベイジアン均衡を定義した。Meier and Schipper は Heifetz et al. (2013a) のモデルに基づいて確率的信念を議論し、ベイジアン均衡を定義し、その存在を証明した。⁹ 今後の研究課題として、完備束を伴った Aumann structure に基づいて確率的信念を議論し、Bayesian game with unawareness にそれを適用することが挙げられる。

Acknowledgments

著者は瀧澤弘和氏に謝辞を述べる。氏からは本研究だけでなく関連する研究にも有益なコメントをいただいた。

References

- Aumann, R., 1976. Agreeing to disagree. *The Annals of Statistics*, 4, 1236–1239.
- Auster, S., 2013. Asymmetric awareness and moral hazard. *Games and Economic Behavior*, 82, 503–521.
- Chen, Y-C., Ely, J.C., Luo, X., 2012. Note on Unawareness: Negative Introspection versus AU Introspection (and KU Introspection). *International Journal of Game*

⁹ Sadzik (2021) と Meier and Schipper (2014) との間には差異がある。前者は共通事前確率を仮定しているのに対して、後者は仮定していない。

- Theory, 41, 325–329.
- Dekel, E., Lipman, B.L., Rustichini, A., 1998. Standard state-space models preclude unawareness. *Econometrica*, 66, 159–173.
- Fagin, R., Halpern, J.Y., 1998. Belief, awareness and limited reasoning. *Artificial Intelligence*, 34, 39–76.
- Feinberg, Y., 2020. Games with unawareness. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, forthcoming.
- Fukuda, S., 2020. Unawareness without AU Introspection. *Journal of Mathematical Economics*, forthcoming.
- Galanis, S., 2013. Unawareness of theorems. *Economic Theory*, 52, 41–73.
- Galanis, S., 2018. Speculation under unawareness, games and economic behavior. 109, 598–615.
- Geanakoplos, J., 1989. Game theory without partitions, and applications to speculation and consensus. Cowles Foundation Discussion Paper No. 914.
- Halpern, J.Y., 2001. Alternative semantics for unawareness. *Games and Economic Behavior*, 37, 321–339.
- Halpern, J.Y., Rêgo, L.C., 2014. Extensive games with possibly unaware players. *Mathematical Social Science*, 70, 42–58.
- Heifetz, A., Meier, M., Schipper, B.C., 2006. Interactive unawareness. *Journal of Economic Theory*, 130, 78–94.
- Heifetz, A., Meier, M., Schipper, B.C., 2008. A canonical model for interactive

- unawareness. *Games and Economic Behavior*, 62, 304–324.
- Heifetz, A., Meier, M., Schipper, B.C., 2013a. Unawareness, beliefs, and speculative trade. *Games and Economic Behavior*, 77, 100–121.
- Heifetz, A., Meier, M., Schipper, B.C., 2013b. Dynamic unawareness and rationalizable behavior. *Games and Economic Behavior* 81, 50–68.
- Heinsalu, S., 2012. Equivalence of the information structure with unawareness to logic of awareness. *Journal of Economic Theory*, 147, 2453–2468.
- Karni, E., Vierø, M.-L., 2013. Reverse Bayesian: A choice-based theory of growing awareness. *American Economic Review*, 103, 2790–2810.
- Karni, E., Vierø, M.-L., 2017. Awareness of Unawareness: A theory of decision making in the face of ignorance. *Journal of Economic Theory*, 168, 301–328.
- Meier, M., Schipper, B.C., 2014. Bayesian games with unawareness and unawareness perfection. *Economic Theory*, 56, 219–249.
- Modica, S., Rustichini, A., 1994. Awareness and partitional information structures. *Theory and Decision*, 37, 107–124.
- Modica, S., Rustichini, A., 1999. Unawareness and partitional information structures. *Games and Economic Behavior*, 27, 265–298.
- Perea, A., 2018. Common belief in rationality in games with unawareness. Maastricht University.
- Piermont, E., 2017. Introspective unawareness and observable choice. *Games and Economic Behavior*, 106, 134–152.

Sadzik, T., 2021. Knowledge, awareness and probabilistic beliefs. *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, forthcoming.

Schipper, B.C., 2014. Unawareness – A gentle introduction to both the literature and the special issue. *Mathematical Social Sciences*, 70, 1–9.

Schipper, B.C., 2015. Awareness. in van Ditmarsch, H., J. Y. Halpern, W. van der Hoek, B. P. Kooi ed., *Handbook of Epistemic Logic*, College Publications, 77–146.