Discussion Paper No.356

情報弱者の知識構造の数学的特徴付け

中央大学大学院博士後期課程
多田　由彦

December 2021

INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

情報弱者の知識構造の数学的特徴付け

多田由彦
中央大学大学院経済学研究科博士後期課程
1st version: 2021 年 9 月 25 日
This version: 2021 年 11 月 5 日

要旨

本稿は情報弱者の知識構造をモデル化し，その特徴づけを行う．標準的な議論では情報格差を情報の非対称性の問題として取り扱ってきた．しかし情報の非対称性の場合，各主体は真の状態が分からなくとも，状態空間については相互知識となっていることを仮定している．従って，情報弱者のように意思決定に関わる特定の情報についてそのような情報が存在することを知らずその情報にアクセスすることができないようなケースについて取り扱うことができていない．本稿は情報集合が空集合であることを認めるような情報関数を再定義することによって，主体が特定の情報にアクセスすることができないケースを表現し，この情報関数に基づいて新たに知識演算子を定義した．先行研究での知識演算子は Necessitation と Monotonicity が同値であった．対照的に我々の知識演算子は, Monotonicity は成立するが, Necessitation は成立しない．この特徴を可知の非対称性の議論と結びつけたとき，我々の知識演算子は不可知を有意味に扱うことができると同時に，主体にとって不可知な事象が実現したとき，主体は意思決定に関わる全ての事象について真偽を知ることができないことを表現している．
キーワード：Information, Knowledge, Unawareness, Necessitation, Monotonicity, The Information Poor.

I　イントロダクション

Akerlof (1970) 以後，情報の非対称性 (asymmetric information) の議論は相互作用的状況において主体が受け取る情報は主体が置かれている立場によって異なると想定し，主体の行動の帰結を分析してきた．こうした議論は契約理論やモラルハザードなど，情報の非対称性によって最適な行動を取ることができないかもしれない相互作用的状況を分析することに貢献してきた．しかしながら，情報の非対称性の議論は“情報の格差”の一部を反映して分析できているかもしれないが，その全てを分析できているわけではない．例えば，失業保険などの社会保障制度は国家が失業した労働者を保護する制度について考えよう．情報弱者 (the information poor) と呼ばれるような層はそのような制度の存在すら気づかず，結果的に失業保険の申請という意思決定を行うことができないことがありうる．しかしながら，情報の非対称性の議論での情報の格差は，主体が受け取る情報集合の粗さの違いを意味するのであって，上の例のような“情報の存在そのもの”に対する無知について取り

扱えているわけではない．本稿はそのようなケースを取り扱うための準備として，単一主体の情報関数と知識演算子の再定式化とこれらの特徴づけを行い，情報弱者の情報構造 (the information poor's information structure) をモデル化する．

この特徴づけにあたって，本稿は可知の非対称性 (asymmetric awareness) の議論を参考にする．[1] 可知の非対称性は Milgrom and Stokey (1982) の No-Trade Theorem に対して，共通知識の仮定を緩めるために導入された．可知の非対称性の議論では主に 2 つの潮流がある．1 つは Geanakoplos (2021) が提案した非分割的情報構造モデル (もしくは非分割的可能性対応モデル) であり，もう 1 つは Heifetz, Meier and Schipper (2006) が提案した不可知構造モデルである．

1 つ目の非分割的情報構造モデルは，情報関数の仮定を緩めたモデルである．通常の情報構造モデルでは，情報関数が分割的であることを仮定する (e.g., Aumann (1976; 1987), Milgrom (1981), Milgrom and Stokey (1982))．これに対して Geanakoplos (2021) は情報関数が分割的でないケースを想定し， No-Trade Theorem の考察を行なった．彼の論文以後，日分割的情報構造モデルでは，不可知を高階の無知 (Plausibility) として取り扱い，分析してきた (e.g., Samet (1990), Brandenburger, Dekel and Geanakoplos (1992), Shin (1993), Modica and Rustichini 1994, 1999), Dekel, Lipman and Rustichini (1998), Chen, Ely and Luo (2012), Tada (2021b))．

2 つ目の不可知構造モデルは，状態の表現力，もしくは属性に注目したモデルである．通常の情報構造モデルにおける状態空間は，抽象的で記号的であることが想定されていた．これに対して, Heifetz, Meier and Schipper (2006) は，主体が（客観的な）状態空間を認識するとき，表現力の粗さによって，主体が持つ主観的状態空間が他者の主観的状態空間と異なる，もしくは互いに素であることを想定した．主体ごとに主観的状態空間が持つ表現力が異なるので，真の状態に対する主体の認識や解釈が非対称となっている．不可知構造モ

---

[1] 本稿は無知 (unknown, ignorance) と区別するために“awareness”を可知，“unawareness”を不可知と訳す. Schipper (2014) が指摘したように“unawareness”の特徴の 1 つとして概念の欠落 (lack of conception) が挙げられる．以下の例を考えてみよう，コレラ菌は 1884 年にドイツのロベルト・コッホによって発見されたが，コレラ菌自体はコッホが発見する以前から存在していた．コレラ菌発見以前の人々はコレラ菌という概念を持ち合わせておらず，コレラ菌を認識することができないでいた．このとき 18 世紀以前の人々はコレラ菌に対して“unawareness”であったと表現する．ここでの“unawareness”は不可知と呼ぶのが相応しいであろう．但し，コッホの発見のようにこれまで“unawareness”であった対象が“awareness”の対象に転じることがある. “growing awareness”（Karni and Vierø (2013)) もしくは“discovery” (Schipper (2021)) と呼ばれるケースの場合, “unawareness”を不可知と訳すには適切ではないかもしれないため留意が必要である．

デルが提案されて以降，不可知を概念の欠落 (lack of conception) と解釈して分析する潮流ができた (e.g., Li (2009), Heifetz, Meier and Schipper (2013), Schipper (2013; 2014), Heinsalu (2012), Galanis (2013; 2018)).

近年では，これらの 2 つのアプローチについて比較検討する研究がある．Fukuda (2021) は非分割的情報構造モデルと不可知構造モデルを比較し，それぞれのモデルにおける知識演算子と不可知演算子の特徴を比較した．Tada (2021a) は標準的な状態空間が完備束であると仮定し，不可知構造モデルを参考にして非分割的可能性対応，知識演算子，不可知演算子の定式化と特徴づけを行なった．

本稿のモデルは前者の情報構造モデルに近い．しかしながら，本稿は知識や不可知の先行研究とは異なる特徴を持つ．先行研究における情報関数/可能性対応は情報集合が非空であることを仮定していた．このため，たとえそれが間違っていたとしても，必ず何かしらの情報集合を受け取ることになる．しかし，これでは必要な情報にアクセスすることができないような情報弱者のケースを取り扱うことができない．我々は情報集合が空集合であることを認める．情報弱者が受け取る情報集合が空集合であることを認めることによって，主体が情報にアクセスすることができないようなケースを表現することができるようになる．情報集合が空集合であることを認めるような情報関数を我々は情報弱者の情報関数と呼ぶ．知識演算子はこの情報弱者の情報関数に基づいて再定義されることになる．その知識演算子を我々は情報弱者の知識演算子と呼ぶ.

我々の知識演算子は先行研究とは異なる興味深い特徴を持つ．標準的な情報構造における標準的な知識演算子の定義から Necessitation と Monotonicity が必ず導かれるという特徴はよく知られている (e.g., Osborne and Rubinstein (1994), Dekel, Lipman and Rustichini (1998))．概念の欠落のテーマで議論された知識演算子もまたその定義から Necessitation と Monotonicity が必ず導かれる (e.g., Heifetz, Meier and Schipper (2006))．例外は Tada (2021a) であるが，彼が定義した知識演算子は不可知な事象が存在しないときは Necessitation と Monotonicity は成立するが，不可知な事象が存在するときどちらも成立しないことを示している．すなわち先行研究では Necessitation と Monotonicity の同値性は保たれていた．対照的に我々の知識演算子はこの同値性を保たない. Monotonicity は我々の知識演算子の定義から必ず成立するが, Necessitation については空であるような情報集合が存在する場合は成立しない.

我々の知識演算子の性質は先行研究との関連の中で次の 2 つの含意を持つ. 1 つは不可知演算子の Triviality との関係である. Dekel, Lipman and Rustichini (1998) は不可知演算子が Plausibility, KU Introspection, AU Introspection を満たすとき，以下の 2 つの性質を導いた.[2]

[2] Triviality という名称は Chen, Ely and Luo (2012) から用いた. Unawareness Leads to Unknown という名称は本稿で初めて用いるが，これは Galanis (2013) の Awareness Leads to Knowledge という性質の名称を参考にした.

i) (Triviality) 知識演算子が Necessitation を満たすならば, 主体にとって不可知な事象は存在しない;

ii) (Unawareness Leads to Unknown) 知識演算子が Monotonicity を満たすとき, 主体にとって不可知な事象が存在するならば, 全ての事象に対して主体は無知である.

Dekel, Lipman and Rustichini (1998) はこの 2 つの性質が満たされているとき, 不可知は trivial なものになると指摘した. 本稿の知識演算子は, Plausibility, KU Introspection, AU Introspection の 3 つを仮定したとしても不可知演算子の Triviality は成立しないかもしれないことを根拠づける. Monotonicity が成立するので Unawareness Leads to Unknown は成立するが, 決して trivial な結果ではない. Necessitation が成立しないとき主体が受け取る情報集合は空である. すなわち主体はどの情報集合も受け取ることができていない. 従って主体は意思決定に関わる何らかの知識を持つことができないわけであるから全ての事象に対して無知である.

もう 1 つは不可知演算子の性質の同値性に関する研究との関係である. Modica and Rustichini (1994) は不可知演算子が Plausibility を満たし, 知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth, Positive Introspection を満たすとき, Symmetry と Negative Introspection が同値であることを示した. Chen, Ely and Luo (2012) は不可知演算子が Plausibility を満たし, 知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth を満たすとき, Negative Introspection と AU Introspection が同値であることを示した. ここから不可知演算子が Plausibility を満たし, かつ知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth, Positive Introspection を満たすとき, Negative Introspection, AU Introspection, Symmetry が同値になることが分かる (Chen, Ely and Luo (2012)). これに対して, Tada (2021b) は知識演算子から Necessitation の仮定を外したとしても, AU Introspection と Symmetry が同値になることを示した. すなわち Necessitation と Monotonicity が同値でないようなケースを想定しての結論と言える. 先行研究では Necessitation と Monotonicity が同値であるので, 先行研究の情報関数からは特徴づけることができない公理であったが, 我々の知識演算子はこれを解決する.

本稿の構成は以下の通りである. II 節では先行研究で取り上げられている標準的な情報構造について検討する. 2.3 節では不可知の Triviality の問題に取り組み, 不可知を表現するためのモデルを提供する. III 節では情報弱者の情報構造について検討し, 情報弱者の情報関数と情報弱者の知識演算子について特徴づけを行う. 3.3 節では架空の国家における失業保険制度を例に標準的な情報構造を持つ主体の知識と情報弱者の知識の比較を行う. IV 節では結論を述べる.

II　標準的な情報構造

2.1　標準的な情報関数

本節ではまず標準的な情報関数の定式化を行う. 有限な世界の状態の集合（状態空間）

を Ω と記し，$\omega \in \Omega$ を世界の状態とする．事象は $E \subseteq \Omega$ と記し，$\neg E = \Omega \setminus E$ とする．I を主体の有限集合とする．各主体 $i \in I$ の情報関数を $P_i : \Omega \to 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$ とする．任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$P_i(\omega) \neq \emptyset$ は明らかである．言い換えれば任意の情報集合は非空となる．このとき $\langle \Omega, P_i \rangle$ を（i の）情報構造と呼ぶ．標準的な情報構造では，情報関数は以下の性質を満たすものと仮定する．

P1　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in P(\omega)$.
P2　$\omega' \in P_i(\omega)$ ならば $P_i(\omega') \subseteq P_i(\omega)$.
P3　$\omega' \in P_i(\omega)$ ならば $P_i(\omega') \supseteq P_i(\omega)$.

P2 と P3 を合わせれば $\omega' \in P_i(\omega)$ ならば $P_i(\omega') = P_i(\omega)$ と言えるのは明らかである．P1-3 が成立するとき，情報関数は分割的であると呼ぶ.

2.2　標準的な知識演算子

次に知識演算子 $K_i : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ について考える．任意の状態 $\omega \in \Omega$ と事象 $E \subseteq \Omega$ をとったとき，$K_i(E)$ を以下のように定義する．

$$\begin{cases} \omega \in K_i(E) \text{ if } \quad P_i(\omega) \subseteq E; \text{ and} \\ \omega \notin K_i(E) \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

$\omega \in \Omega$ を与えられたとき，任意の事象 $E \subseteq \Omega$ に対して，$\omega \in K_i(E)$ が成立するとき，“主体 i は ω で E を知っている”と解釈し，$\omega \notin K_i(E)$ が成立するとき，“主体 i は ω で E を知らない”と解釈する．E は任意であるから，$\omega \in \Omega$ を与えられた時点で主体 i がどの事象を知っていて，どの事象を知らないのかが自動的に導かれる．ここで $\langle \Omega, P_i, K_i \rangle$ を知識構造と呼ぶ.

以下は情報関数から導かれる知識演算子の性質である．

命題 1:　知識演算子 $K_i : 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ は以下の性質を満たす.

K1　(Necessitation) $K_i(\Omega) = \Omega$;
K2　(Monotonicity) $E \subseteq F \implies K_i(E) \subseteq K_i(F)$;
K3　(Conjunction) $K_i(E \cap F) = K_i(E) \cap K_i(F)$;
K4　(Truth) P_i が P1 を満たすならば $K_i(E) \subseteq E$;
K5　(Positive Introspection) P_i が P2 を満たすならば $K_i(E) \subseteq K_i K_i(E)$;
K6　(Negative Introspection) P_i が P3 を満たすならば $\neg K_i(E) \subseteq K_i \neg K_i(E)$.

注釈 1:　K3 は K2 を導く.

K1-3 は知識演算子の定義から必ず導かれる. これは情報関数が非分割的であったとしても常に成り立つことを意味する.

2.3　可知の非対称性

情報の非対称性の議論では, 主体は真の状態について知らないけれども, 状態空間上の状態全てについて知っている. 対照的に可知の非対称性の議論では, 主体は真の状態を知らないだけでなく, 状態空間上の一部の状態について認識することができない. 我々はこうした認識不能を取り扱うために, 不可知演算子 $U_i: 2^\Omega \to 2^\Omega$ を用いる. 任意の事象 $E \subseteq \Omega$ を与えたとき, $U_i(E)$ を"主体 i は事象 E について不可知である"と解釈する. また $A_i(E) = \neg U_i(E)$ と定義し,"主体 i は事象 E について可知である"と解釈する. Dekel, Lipman and Rustichini (1998) は不可知演算子が以下の 3 つの性質を満たすものと仮定した.

U1　(Plausibility) $U_i(E) \subseteq \neg K_i(E) \cap \neg K_i \neg K_i(E)$.[3]
U2　(KU Introspection) $K_i U_i(E) = \emptyset$.
U3　(AU Introspection) $U_i(E) \subseteq U_i U_i(E)$.

U1 は"主体がある事象に不可知である"とは,"主体がその事象に無知であり, かつその無知に無知である"ことを示し, かつその逆も成り立つことを意味する. これは K6 と対照的な性質である. U2 は主体が不可知な事象を知ることはできないことを意味する. U3 は主体がある事象に不可知であるとき, その不可知に対しても不可知であることを意味する.

これらの性質は不可知の議論に対して説得的な性質であると言える. しかし Dekel, Lipman and Rustichini (1998) は以下の性質を導いた.

命題 2:　不可知演算子 $U_i: 2^\Omega \to 2^\Omega$ が U1-3 を満たすと仮定する. このとき,

1. (Triviality) K_i が K1 を満たすならば, 任意の事象 $E \subseteq \Omega$ に対して $U_i(E) = \emptyset$;
2. (Unawareness leads to Unknown) K_i が K2 を満たすならば, 任意の事象 $E, F \subseteq \Omega$ に対して $U_i(E) \subseteq \neg K_i(F)$.

---

[3] Modica and Rustichini (1994) は不可知演算子を $U^{MR} = \neg K_i(E) \cap \neg K_i \neg K_i(E)$ と定義した. 彼らの演算子と比較すると Plausibility はより一般化された unawareness 演算子の特徴である.

命題 1 より，K_i は K1-2 を必ず満たすため，標準的な知識演算子では不可知を有意義に扱うことができない.[4] 従って知識演算子の扱い方を変える必要が出た.

Heifetz, Meier and Schipper (2006) は Necessitation, Monotonicity が成立していても，Triviality を満たさないような不可知のモデル，不可知構造（unawareness structure）を提案した． 彼らは不可知を“概念の欠落”と解釈し，状態に含まれている記述の“表現力”の荒さを考えた．そして状態空間の集合族をとり，集合族が完備束であると仮定することによって，各状態空間上の状態の間で表現力の違いを表した．そして集合族上の状態空間の和集合をとり，知識演算子をその和集合上で定義することによって不可知演算子の Triviality を取り除いた.

類似のアプローチとして Tada (2021a) の構成法的完備束状態空間モデル（constructive-state-space model with complete lattice）がある．彼は多属性状態空間を考え，その上に知識演算子を定義した．その際，知識演算子の定義は主体が事前にどの属性を認識しているのかに依存する．彼のモデルは Necessitation, Monotonicity, Triviality が同値であることを示し，かつ主体の主観的状態空間が（客観的な）状態空間と同値でない場合には, Triviality を満たさないことを示した.

本稿は単純化のため，単一属性状態空間を想定した上で, Tada (2021a) の知識演算子を定義する．まず i の主観的状態空間を $\Omega_i = \bigcup_{\omega\in\Omega} P_i(\omega)$ と定義する.[5] ここで主体 i は主観的状態空間 Ω_i 上の各状態については認識することができるが, Ω_i に属さない状態については認識することができないものと考える．ここで知識演算子 $K_i^*: 2^\Omega \to 2^\Omega$ を以下のように定義する.

$$\begin{cases} \omega \in K_i^*(E) \text{ if } \quad P_i(\omega) \subseteq E \text{ and } E \subseteq \Omega_i; \text{ and} \\ K_i^*(E) = \emptyset \quad \text{otherwise.} \end{cases}$$

これはある状態 ω を与えられたとき，事象 E が情報集合 $P_i(\omega)$ の上位集合であるだけでなく，E が主観的状態空間 Ω_i 上に属している場合のみ，E を知ることができ，そうで

---

[4] 但し, Plausibility, AU Introspection, KU Introspection を仮定しないならば, Triviality と Unawareness leads to Unknown は成立しない. Fukuda (2021) は AU Introspection を仮定しない方法で不可知の議論を進めている．なお, Tada (2021b) は Monotonicity, Truth が成立している場合には KU Introspection が成立することを指摘している．すなわち情報関数が P1 を満たしているならば KU Introspection は必ず成立する.

[5] 主観的状態空間のこの定義は Fiorini and Rodrigues-Neto (2017) を参照した．留意すべきは，我々は主観的状態空間が客観的状態空間の部分集合であることを要求しているのに対して，彼らは主観的状態空間が客観的状態空間の上位集合であるかもしれないことを認めている.

ない場合は E を知ることができないことを意味する．この定義は情報関数が分割的であるかどうかに依存しない．K^* を持つ知識構造を $\langle\Omega, P_i, K_i^*\rangle$ と記す．

このとき知識演算子は以下の性質を導く．

命題 3: $\Omega_i \neq \emptyset$ と仮定する．このとき知識演算子 $K_i^*: 2^\Omega \to 2^\Omega$ は以下の性質を満たす．

K*1　$\Omega_i = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $K_i^*(\Omega) = \Omega$;
K*2　$\Omega_i = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $E \subseteq F \implies K_i^*(E) \subseteq K_i^*(F)$;
K*3　$\Omega_i = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $K_i^*(E \cap F) = K_i^*(E) \cap K_i^*(F)$;
K*4　P_i が P1 を満たすならば，$K_i^*(E) \subseteq E$;
K*5　P_i が P2 を満たすならば，$K_i^*(E) \subseteq K_i^* K_i^*(E)$;
K*6　$\Omega_i = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り P_i が P3 を満たすならば $\neg K_i^*(E) \subseteq K_i^* \neg K_i^*(E)$.

主体 i の主観的状態空間 Ω_i が客観的状態空間 Ω と一致する場合にのみ K_i^* は Necessitation, Monotonicity, Conjunction が成立する．従って，K_i^* を用いれば，不可知演算子が Plausibility（$U_i^*(E) \subseteq \neg K_i^*(E) \cap \neg K_i^* \neg K_i^*(E)$), KU Introspection（$K_i^* U_i^*(E) = \emptyset$), AU Introspection（$U_i^*(E) \subseteq U_i^* U_i^*(E)$）を満たしていても，Triviality（$U_i^*(E) = \emptyset$）を満たさない．従って，このモデルであれば不可知を取り扱うことが可能となる．

注釈 2: 不可知演算子が Plausibility, KU Introspection, AU Introspection を満たすと仮定する．このとき，$\Omega_i = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り不可知演算子は Triviality を満たす．

もう 1 つ強調すべき特徴は，$\Omega_i \neq \Omega$ のとき，P3 を仮定したとしても Negative Introspection が成立しないことである．もし $K_i^*(E) = \emptyset$ であるならば，$\Omega = \neg K_i^*(E) \supseteq K_i^* \neg K_i^*(E) = K_i^*(\Omega)$ となる．すなわち Tada (2021a) の知識演算子の性質が標準的な知識演算子の性質と一致するのは $\Omega_i = \Omega$ の場合に限られる．

III　情報弱者の情報構造

3.1　情報弱者の情報関数

前節では標準的な知識関数と，不可知との関係を加味した知識関数の 2 つを取り扱った．前者の知識関数の場合，Necessitation と Monotonicity が必ず成立することから，不可知な事象について論じることに限界があった．対照的に後者の知識関数の場合，対象となる事象が主観的状態空間上に属するか否かでその事象が不可知であるかどうかを表現することが可能であった．従って，主体の事象に対する認識不能は後者の知識演算子を用いるこ

とで分析することができる．しかしながら，後者の知識演算子は情報関数 P_i に基づいて定義されている．従って主体が受け取る情報集合は必ず非空であり，情報集合に対する認識不能を表現しているモデルとはなっていない．情報弱者のように特定の情報集合にアクセスすることができないようなケースは取り扱うことができないことには留意すべきである．

情報集合が空集合とならないのは，非分割的情報構造モデルだけではない．不可知構造モデルにおいても不可知演算子が非空な情報集合を導くことを仮定している (e.g., Heifetz, Meier and Schipper (2006)).

そこで本節では主体が受け取る情報集合が空集合であるような情報集合，情報空集合（empty-information set）を取り扱う．我々は情報空集合を認めるような情報関数，情報弱者の情報関数（the information poor's information function）$\hat{P}_i: 2^\Omega \to 2^\Omega$ について検討する．この定義から $\hat{P}_i(\omega) = \emptyset$ であるような $\omega \in \Omega$ が存在するかもしれない．このとき“主体 i は ω に関連する情報を受け取ることができない”と解釈する．ここで $\langle \Omega, \hat{P}_i \rangle$ を情報弱者（i）の情報構造（the information poor's information structure）と呼ぶ．

ここで情報弱者の情報関数の性質を以下のように定める．

$\hat{\mathrm{P}}1$　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in \mathrm{P_i}(\omega)$.
$\hat{\mathrm{P}}2$　任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$\hat{P}_i(\omega') \subseteq \hat{P}_i(\omega)$.
$\hat{\mathrm{P}}3$　任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$\hat{P}_i(\omega') \supseteq \hat{P}_i(\omega)$.
$\hat{\mathrm{P}}4$　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ ならば，$\omega \in \hat{P}_i(\omega)$.
$\hat{\mathrm{P}}5$　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in \hat{P}_i(\omega')$ を満たす $\omega' \in \Omega$ が存在するならば，$\omega \in \hat{P}_i(\omega)$.

$\hat{\mathrm{P}}4$-5 はそれぞれ $\hat{\mathrm{P}}1$ を緩めた仮定である．

注釈 3: $\hat{\mathrm{P}}4$ と $\hat{\mathrm{P}}5$ は同値ではない．また $\hat{\mathrm{P}}1$ が満たされることと $\hat{\mathrm{P}}4$-5 が満たされることもまた同値にならない．

$\hat{\mathrm{P}}4$ は Truth の証明に，$\hat{\mathrm{P}}5$ は Positive Introspection の証明に必要となる．

3.2　情報弱者の知識演算子

続いて情報弱者の知識演算子（the information poor's knowledge operator）$\hat{K}_i: 2^\Omega \to 2^\Omega$ を $\hat{P}_i$ に基づいて以下のように定義する．

$$\begin{cases} \omega \in \hat{K}_i(E) \ \text{if} \ \ \hat{P}_i(\omega) \subseteq E \ \text{and} \ \hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset; \ \text{and} \\ \omega \notin K_i(E) \ \ \text{otherwise.} \end{cases}$$

状態 ω を与えられたときの情報集合が非空の場合に限り，情報集合の上位集合であるよ

うな事象について主体 i はその事象を知っているとする．対照的に状態 ω が情報空集合を導くとき，i は全ての事象に無知である．これは情報弱者が ω で情報にアクセスできない場合，意思決定に関連する知識を獲得することができないと解釈することができる．$\langle\Omega, \hat{P}_i, \hat{K}_i\rangle$ を情報弱者の知識構造と呼ぶ．

情報弱者の知識演算子は以下の性質を満たす．

命題 4: 情報弱者の知識演算子 $\hat{K}_\iota : 2^\Omega \to 2^\Omega$ は以下の性質を持つ．

$\hat{\mathrm{K}}1$ $\hat{P}_\iota(\omega) \neq \emptyset$ が成立するとき，かつそのときに限り $\hat{K}_\iota(\Omega) = \Omega$;
$\hat{\mathrm{K}}2$ $E \subseteq F \implies \hat{K}_\iota(E) \subseteq \hat{K}_\iota(F)$;
$\hat{\mathrm{K}}3$ $\hat{K}_\iota(E \cap F) = \hat{K}_\iota(E) \cap \hat{K}_\iota(F)$;
$\hat{\mathrm{K}}4$ $\hat{P}_\iota$ が $\hat{\mathrm{P}}4$を満たすならば，$\hat{K}_\iota(E) \subseteq E$;
$\hat{\mathrm{K}}5$ $\hat{P}_\iota$ が $\hat{\mathrm{P}}2$，$\hat{\mathrm{P}}5$ を満たすならば，$\hat{K}_\iota(E) \subseteq \hat{K}_\iota\hat{K}_\iota(E)$;
$\hat{\mathrm{K}}6$ $\hat{P}_\iota(\omega) \neq \emptyset$ が成立するとき，かつそのときに限り $\hat{P}_\iota$ が $\hat{\mathrm{P}}3$ を満たすならば，$\neg\hat{K}_\iota(E) \subseteq \hat{K}_\iota\neg\hat{K}_\iota(E)$.

これらの性質のうち注目すべきは $\hat{\mathrm{K}}1$-3 の非同値性である．先行研究では Necessitation, Monotonicity, Conjunction が同値であった．対照的に我々の知識演算子は Monotonicity と Conjunction は同値であるが，Necessitation とは同値となっていない．この特徴は不可知との関係の中で興味深い含意を持つ．

注釈 4: 情報弱者の不可知演算子 $\hat{U}_\iota : 2^\Omega \to 2^\Omega$ が Plausibility（$\hat{U}_\iota(E) \subseteq \neg\hat{K}_\iota(E) \cap \neg\hat{K}_\iota\neg\hat{K}_\iota(E)$），KU Introspection（$\hat{K}_\iota\hat{U}_\iota(E) = \emptyset$），AU Introspection（$\hat{U}_\iota(E) \subseteq \hat{U}_\iota\hat{U}_\iota(E)$）を満たすと仮定する．このとき $\hat{U}_\iota$ は Unawareness Leads to Unknown（$\hat{U}_\iota(E) \subseteq \neg\hat{K}_\iota(F)$）を満たす．また $\hat{P}_\iota(\omega) \neq \emptyset$ が成立するとき，かつそのときに限り $\hat{U}_\iota$ が Triviality（$\hat{U}_\iota(E) = \emptyset$）を満たす．

すなわち $\hat{P}_\iota(\omega) = \emptyset$ とき，Triviality は成立しないが Unawareness Leads to Unknown は常に成立する．これは一見 trivial な結論であるように見えるが，決してそうではない．主体が情報空集合を受け取るとき，$\hat{U}_\iota(E) \neq \emptyset$ が成立する．このとき Unawareness Leads to Unknown より主体は全ての事象に対して無知であるが，情報集合が空であるので情報弱者が何の情報も取得することができないことは現実世界と整合的であると言える．

命題 4 で示された性質のうち他に 2 つ注目すべき性質がある．1 つは $\hat{\mathrm{K}}4$ で，情報弱者の情報関数の仮定として $\hat{\mathrm{P}}1$ である必要はなく，$\hat{\mathrm{P}}4$ に緩めても成立する．また $\hat{\mathrm{K}}5$ では，情報弱者の情報関数が $\hat{\mathrm{P}}2$ だけでなく $\hat{\mathrm{P}}5$ も満たすことを要求する．$\hat{\mathrm{P}}5$ を満たさないとき，証明の途中で $\hat{P}_\iota(\omega) \subseteq \hat{K}_\iota(E)$ が成立しない．いずれにしても $\hat{\mathrm{P}}1$ は必要ではなく，それを緩め

た性質が証明に必要となる．

情報弱者の知識演算子の特徴は不可知演算子の同値性に関する研究と関連を持つ．Modica and Rustichini (1994) は知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth, Positive Introspection を満たすとき，Negative Introspection と不可知演算子の性質，Symmetry（$U_i(E) = U_i(\neg E)$）が同値であることを示した．Chen, Ely and Luo (2012) は知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth を満たすとき，Negative Introspection と AU Introspection が同値であることを示した．ここから知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth, Positive Introspection を満たすとき，3 つの性質，Negative Introspection, AU Introspection, Symmetry が同値であることを導くことができる．これに対して Tada (2021b) は Necessitation の仮定を外し，Monotonicity, Truth, Positive Introspection, Plausibility を仮定した場合, AU Introspection と Symmetry が同値であることを示した．[6] 彼は Necessitation の仮定がなくとも Triviality を満たさない不可知を考察できることを指摘した．しかし先行研究では情報関数に基づいて知識演算子の定義から Necessitation と Monotonicity の同値性が導かれており, Tada (2021b) を基礎づけることができなかった．我々の知識演算子はそうした問題点を回避して，Tada (2021b) を基礎づけることができている. Tada (2021b) の主要定理を一般化すると以下のようになる．

命題 5: 情報弱者の情報関数 $\widehat{P_i}: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ が $\widehat{\mathrm{P}}2$, 4-5 を満たすと仮定する．このとき AU Introspection（$\widehat{U_i}(E) = \widehat{U_i}\widehat{U_i}(E)$）と Symmetry（$\widehat{U_i}(E) = \widehat{U_i}(\neg E)$）は同値である．但し，Necessitation は成立しないかもしれない．

3.3　例

本節では標準的な情報構造と情報弱者の情報構造とを比較する具体例を提示する．

ある架空の国家（fictional country），オイコノミア（Oiconomia）の失業保険制度を考える．オイコノミアには失業保険制度があり，失業者が行政に失業保険受給の申請をしたとき，その失業者が受給資格を満たしていれば，失業保険を受給することができ，資格を満たしていなければ，失業保険を受給することができない．オイコノミアでは出稼ぎに来た移民が失業者になることがある．もしその移民がオイコノミア国籍を持ってから 3 年以上経過していれば，失業保険の受給資格を持つが，国籍取得から 3 年未満であれば，受給資格を持つことができない．

---

[6] 但し, Tada (2021b) の Plausibility と AU Introspection は Dekel et al. (1998)のオリジナルな定義とは異なる．彼の Plausibility は Modica and Rustichini (1994) の不可知演算子の定義（$U^{MR} = \neg K_i(E) \cap \neg K_i \neg K_i(E)$）そのものであり，彼の AU Introspection は包含関係ではなく等号関係となっている（$U_i(E) = U_i U_i(E)$）．オリジナルな Plausibility と AU Introspection に緩めた場合, Tada (2021b) の結果は成立しない．

ここで 3 人の移民 Alice, Bob, Chris を考える．Alice は幼少期にオイコノミア国籍を取得してから 15 年が経っている．彼女はオイコノミアの学校で失業保険制度を学び，受給資格について正確な知識を持っている．従って自分が受給資格を持っていることを彼女は知っている．Bob はオイコノミア国籍を取得してからまだ 2 年しかたっていないが，オイコノミアの学校に通ったことがないために受給資格について正しい知識を持っておらず，受給資格をすでに持っていると勘違いしている．Chris はオイコノミア国籍を取得してから 5 年が経つが，オイコノミアの学校に通ったことがないため，失業保険制度があることを知らない．さらに失業保険制度に関わる情報にアクセスする手段を持っていない．すなわち Chris は失業保険制度に対して情報弱者である．そのため Chris は失業保険の受給資格を持っているにもかかわらず，そのことに気づかないでいる．

ここで状態空間を $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$ とおく．ω_1 は "Alice/Bob/Chris は失業保険の受給資格を持つ" ことを意味し，ω_2 は "Alice/Bob/Chris は失業保険の受給資格を持たない" ことを意味するものとする．Alice, Bob, Chris の情報関数はこの Ω 上で定義される．

まず Alice の分割的な情報構造をモデル化する．Alice は失業保険制度についての知識を持っているので，Ω 上の全ての状態について知識を持っている．さらに失業保険の受給資格について正確な知識を持っているので，彼女の情報集合は $P_A(\omega_1) = \{\omega_1\}, P_A(\omega_2) = \{\omega_2\}$ と表すことができる．このとき，"Alice は受給資格を持つ" という事象 E_A について，$P_A(\omega_1) \subseteq E_A$ を満たすので $\omega_1 \in K_A(E_A)$ であり，$P_A(\omega_2) \nsubseteq E_A$ であるから $\omega_2 \notin K_A(E_A)$ である．Alice の情報関数は P1-3 を満たしていることは明らかであるので，Negative Introspection が成立する．従って不可知演算子が Plausibility を満たすとき不可知演算子は Triviality を満たす．

続いて Bob の非分割的な情報構造をモデル化する．Bob は失業保険制度についての正しい知識を持っていないために，本来は受給資格を持っていないにもかかわらず，受給できるものと勘違いをしている．このとき Bob の情報集合は $P_B(\omega_1) = P_B(\omega_2) = \{\omega_1\}$ と表すことができる．このとき，"Bob は受給資格を持つ" という事象 E_B について，$P_B(\omega_1) = P_B(\omega_2) \subseteq E_B$ であるから，$\omega_1, \omega_2 \in K_B(E_B)$ である．対して "Bob は受給資格を持たない" という事象 $\neg E_B$ について，$P_B(\omega_1) \nsubseteq \neg E_A$ かつ $P_B(\omega_2) \nsubseteq \neg E_A$ であるから，$\omega_1, \omega_2 \notin K_B(\neg E_B)$. これは実際には受給資格を持たないという真の状態に対して，Bob は受給資格を持たないことを知らず，受給資格を持っているものと勘違いしていることを表している．但し，$A_B(E_B) = \Omega$，$K_B \neg K_B(\neg E_B) = K_B(\Omega) = \Omega$ であるから $A_B(\neg E_B) = A_B(\Omega) = \Omega$. 従って，$U_B(E_B) = U_B(\neg E_B) = U_B(\Omega) = \emptyset$ が満たされる．すなわち Bob の不可知も Triviality を満たす．

最後に Chris の情報弱者の情報構造をモデル化する．Chris は失業保険制度に関わる情報に対してアクセスする手段を持っていない．従って，彼は自分が受給資格を持っているかどうかを知らないだけでなく，失業保険制度が存在すること自体に気づいていない．このとき Chris の情報集合は $\hat{P}_C(\omega_1) = \hat{P}_C(\omega_2) = \emptyset$ と表すことができる．すなわち真の状態が

いずれの場合であっても，Chris は非空な情報集合を受け取ることができない．ここで“Chris は受給資格を持つ”という事象 E_C について，$\hat{P}_C(\omega_1)=\hat{P}_C(\omega_2)=\emptyset$ であるから，$\omega_1,\omega_2 \notin \hat{K}_C(E_C)=\emptyset$，すなわち $\omega_1,\omega_2 \in \neg\hat{K}_C(E_C)=\Omega$ である．ここで $\neg\hat{K}_C\neg\hat{K}_C(E_C)=\Omega$ であるから，Plausibility より $\hat{U}_C(E_C)=\Omega$，すなわち Chris の不可知演算子は Triviality を満たさない．従って Chris は自分が受給資格を持っていることに不可知である．

IV　結論

本稿は意思決定に関連のある情報にアクセスできないような情報弱者の情報構造のモデル化を試み，その特徴づけを行なった．我々が提案した情報弱者の情報関数は情報集合が空集合であることを認める．

我々が提案した情報弱者の知識演算子は先行研究における知識演算子と異なり，Necessitation と Monotonicity の同値性を満たさない．Monotonicity は必ず成立するが Necessitation は成立しないかもしれない．この特徴は Unawareness Leads to Unknown を導くかもしれない．Dekel, Lipman and Rustichini (1998) は Unawareness Leads to Unknown について，不可知を有意義に議論することができない性質であると指摘する．しかしながら我々が提案した情報弱者の情報構造においては，情報弱者が関連する情報にアクセスできないという特徴を表現することができている点で，有意義に議論することができると主張することができる．

本稿は主体の情報構造の特徴づけのみに焦点を絞った．今後の研究課題としては意思決定の状況やゲーム的状況に導入し，分析する必要がある．例えば，企業と消費者が交わした契約に不備があり紛争へと突入したとする．企業は契約に関わる紛争専門の顧問弁護士を雇っており，顧問弁護士から紛争に関連のある情報に自由にアクセスすることができる．対照的に消費者はまず弁護士を探すところから始めなければならず，紛争解決に必要な情報にアクセスすることが難しいかもしれない．このとき企業は自分の利益にかなっているならば，消費者にとって有利な情報を提供するかもしれないし，あるいはしないかもしれない．もし企業が情報提供を行わないならば，消費者は自分に有利な情報を受け取れないまま紛争に取り組むことになるであろう．こうしたゲーム的状況を分析するために必要な下地を本稿は提供している．

補論: 証明

命題 1 の証明. (K1), (K2) は知識演算子の定義から明らか.

(K3). 任意の $\omega \in K_i(E\cap F)$ をとる．このとき知識演算子の定義から $P_i(\omega)\subseteq E\cap F$ が成立する．これは $P_i(\omega)\subseteq E$ かつ $P_i(\omega)\subseteq F$ を意味するので，$\omega\in K_i(E)$ かつ $\omega\in K_i(F)$ が成立する．従って，$K_i(E\cap F)\subseteq K_i(E)\cap K_i(F)$．続いて任意の $\omega\in K_i(E)\cap K_i(F)$ をとる．このとき知識演算子の定義から $P_i(\omega)\subseteq E$ かつ $P_i(\omega)\subseteq F$ が成立する．これは $P_i(\omega)\subseteq$

$E\cap F$ を意味するので，$\omega\in K_i(E\cap F)$ が成立する．従って，$K_i(E)\cap K_i(F)\subseteq K_i(E\cap F)$. 以上より $K_i(E\cap F)=K_i(E)\cap K_i(F)$.

(K4). P_i が P1 が成立すると仮定する．任意の $\omega\in K_i(E)$ をとる．このとき $P_i(\omega)\subseteq E$ が成立する. P1 より，$\omega\in P_i(\omega)$ であるから，$\omega\in E$. 従って $K_i(E)\subseteq E$.

(K5). P_i が P2 が成立すると仮定する．任意の $\omega\in K_i(E)$ をとる．このとき $P_i(\omega)\subseteq E$ が成立する. P2 より，任意の $\omega'\in P_i(\omega)$ に対して，$P_i(\omega')\subseteq P_i(\omega)$ であるから，$P_i(\omega')\subseteq E$. 従って，$\omega'\in K_i(E)$ であるから $P_i(\omega)\subseteq K_i(E)$ が成立する．従って $\omega\in K_iK_i(E)$ が成立するので，$K_i(E)\subseteq K_iK_i(E)$.

(K6). P_i がP3が成立すると仮定する．任意の $\omega\in\neg K_i(E)$ をとる．すなわち $\omega\notin K_i(E)$. このとき $P_i(\omega)\nsubseteq E$ が成立する．ここで任意の $\omega'\in P_i(\omega)$ をとる. P3 より $P_i(\omega)\subseteq P_i(\omega')$ であるから，$P_i(\omega')\nsubseteq E$ が成立する．従って $\omega'\notin K_i(E)$ であるから $\omega'\in\neg K_i(E)$. すなわち，$P_i(\omega)\subseteq\neg K_i(E)$ が成立するので，$\omega\in K_i\neg K_i(E)$. 従って $\neg K_i(E)\subseteq K_i\neg K_i(E)$. ■

命題 2 の証明. U1-3 が成立しているとき，任意の $E\subseteq\Omega$ に対して，$U_i(E)\subseteq U_iU_i(E)\subseteq\neg K_iU_i(E)\cap\neg K_i\neg K_iU_i(E)=\neg\emptyset\cap\neg K_i\neg\emptyset=\neg K_i(\Omega)$.

1 の証明. K 1 が成立していると仮定する．すなわち $K_i(\Omega)=\Omega$. このとき，$U_i(E)\subseteq\neg K_i(\Omega)=\neg\Omega=\emptyset$.

2 の証明. K2 が成立していると仮定する．このとき，任意の $F\subseteq\Omega$ に対して $K_i(F)\subseteq K_i(\Omega)$ は明らか．このとき，$\neg K_i(\Omega)\subseteq\neg K_i(F)$. 従って，$U_i(E)\subseteq\neg K_i(\Omega)\subseteq\neg K_i(F)$. ■

命題 3 の証明. (K^*1-3, 6) $\Omega_i=\Omega$ を仮定する．すなわち任意の $E\subseteq\Omega$ に対して $E\subseteq\Omega_i$ が成立する．このとき K_i^* と K_i の定義から $K_i^*(E)=K_i(E)$ は明らかである．従って命題 2 から Necessitation, Monotonicity, Conjunction, Negative Introspection が成立する．

$\Omega_i\neq\Omega$ を仮定する．すなわち $\Omega_i\subsetneq\Omega$. このとき K_i^* の定義から $K_i^*(\Omega)=\emptyset$ より Necessitation は成立しない．また $\Omega_i\neq\emptyset$ より $K_i^*(\Omega_i)\neq\emptyset$. 従って $K_i^*(\Omega_i)\nsubseteq K_i^*(\Omega)$ であるから Monotonicity は成立しない．また $K_i^*(\Omega_i\cap\Omega)=K_i^*(\Omega_i)$ に対して $K_i^*(\Omega_i)\cap K_i^*(\Omega)=\emptyset$ であるから $K_i^*(\Omega_i\cap\Omega)\neq K_i^*(\Omega_i)\cap K_i^*(\Omega)$. すなわち Conjunction は成立しない．最後に $\Omega=\neg K_i^*(\Omega)\supsetneq K_i^*\neg K_i^*(\Omega)=K_i^*(\Omega)=\emptyset$ より, Negative Introspection は成立しない．

(K^*4) P_i が P1 を満たすと仮定する．任意の $\omega\in K_i^*(E)$ をとる．このとき $P_i(\omega)\subseteq E$ かつ $E\subseteq\Omega_i$ が成り立つ. P1 より $\omega\in P_i(\omega)\subseteq E$. 従って $K_i^*(E)\subseteq E$.

(K^*5) P_i が P2 を満たすと仮定する．任意の $\omega\in K_i^*(E)$ をとる．このとき $P_i(\omega)\subseteq E$ かつ $E\subseteq\Omega_i$ が成り立つ．P2 より任意の $\omega'\in P_i(\omega)$ に対して $P_i(\omega')\subseteq P_i(\omega)$ であるから $P_i(\omega')\subseteq E$. 従って，$\omega'\in K_i^*(E)$ であるから $P_i(\omega)\subseteq K_i^*(E)$. 以上より，$K_i^*(E)\subseteq K_i^*K_i^*(E)$ が成立する．■

命題 4 の証明. ($\widehat{K}3$) 任意の $\omega\in\widehat{K}_i(E\cap F)$ をとる．このとき $\widehat{P}_i(\omega)\subseteq E\cap F$ かつ $\widehat{P}_i(\omega)\neq$

$\emptyset$ である．これは $\hat{P}_i(\omega) \subseteq E$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \subseteq F$ である．$\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ より，$\omega \in \hat{K}_i(E)$ かつ $\omega \in \hat{K}_i(F)$ である．すなわち $\omega \in \hat{K}_i(E) \cap \hat{K}_i(F)$．従って $\hat{K}_i(E \cap F) \subseteq \hat{K}_i(E) \cap \hat{K}_i(F)$．続いて任意の $\omega \in \hat{K}_i(E) \cap \hat{K}_i(F)$ をとる．このとき $\omega \in \hat{K}_i(E)$ かつ $\omega \in \hat{K}_i(F)$ であるから $\hat{P}_i(\omega) \subseteq E$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \subseteq F$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$．これは $\hat{P}_i(\omega) \subseteq E \cap F$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ である．従って $\omega \in \hat{K}_i(E \cap F)$ であるから $\hat{K}_i(E \cap F) \supseteq \hat{K}_i(E) \cap \hat{K}_i(F)$．以上から $\hat{K}_i(E \cap F) = \hat{K}_i(E) \cap \hat{K}_i(F)$.

($\hat{\mathrm{K}}$2) Conjunction は Monotonicity を導く．

($\hat{\mathrm{K}}$1, 6) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して $\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ を仮定する．このとき $\hat{K}_i$ と K_i の定義から任意の $E \subseteq \Omega$ に対して $\hat{K}_i(E) = K_i(E)$ は明らかである．従って命題 2 から Necessitation と Negative Introspection が成立する．

　続いて $\hat{P}_i(\omega) = \emptyset$ となるような $\omega \in \Omega$ が存在すると仮定する．このとき $\omega \notin \hat{K}_i(\Omega)$ である．すなわち $\omega \in \neg\hat{K}_i(\Omega)$．このとき $\hat{K}_i(\Omega) \neq \Omega$ より Necessitation は満たされない．さらに $\hat{P}_i(\omega) = \emptyset$ であるから任意の $E \subseteq \Omega$ に対して $\omega \notin \hat{K}_i(E)$．従って，$\omega \notin \hat{K}_i\neg\hat{K}_i(E)$ であるから $\neg\hat{K}_i(E) \nsubseteq \hat{K}_i\neg\hat{K}_i(E)$．すなわち Negative Introspection は成立しない.

($\hat{\mathrm{K}}$4) $\hat{P}_i$ が $\hat{\mathrm{P}}$4 を満たすと仮定する．任意の $\omega \in \hat{K}_i(E)$ をとる．このとき $\hat{P}_i(\omega) \subseteq E$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ が成立する．このとき $\hat{\mathrm{P}}$4 より $\omega \in \hat{P}_i(\omega)$ が成立する．従って $\omega \in E$ より $\hat{K}_i(E) \subseteq E$.

($\hat{\mathrm{K}}$5) $\hat{P}_i$ が $\hat{\mathrm{P}}$2, $\hat{\mathrm{P}}$5 を満たすと仮定する．任意の $\omega \in \hat{K}_i(E)$ をとる．このとき $\hat{P}_i(\omega) \subseteq E$ かつ $\hat{P}_i(\omega) \neq \emptyset$ が成立する．ここで任意の $\omega' \in \hat{P}_i(\omega)$ をとる．$\hat{\mathrm{P}}$2 より $\hat{P}_i(\omega') \subseteq \hat{P}_i(\omega)$ であり，$\hat{\mathrm{P}}$5 より $\omega' \in \hat{P}_i(\omega')$ が成り立つ．$\hat{P}_i(\omega') \subseteq E$ より $\omega' \in E$．従って $\omega' \in \hat{K}_i(E)$ であるから $\hat{P}_i(\omega) \subseteq \hat{K}_i(E)$ より $\omega \in \hat{K}_i\hat{K}_i(E)$．従って $\hat{K}_i(E) \subseteq \hat{K}_i\hat{K}_i(E)$．■

命題 5 の証明. 情報弱者の情報関数が $\hat{\mathrm{P}}$2, 4-5 を満たすとき，命題 4 より情報弱者の知識演算子は Truth と Positive Introspection を満たす. Monotonicity は必ず満たすので，Tada (2021b) より AU Introspection と Symmetry は同値となる．命題 4 より $\hat{P}_i(\omega) = \emptyset$ のとき，Necessitation は成立しない．■

引用文献

Akerlof, George A. (1970), “The Market for “Lemons”: Quality Uncertanty and the Market Mechanism”, *The Quarterly Journal of Economics*, 84: 488-500.

Aumann, Robert J. (1976), “Agreeing to Disagree”, *The Annals of Statistics*, 4: 1236-1239.

———(1987), Correlated Equilibrium as an Expression of Bayesian Rationality”, *Econometrica*, 55: 1-18.

Brandenburger, Adam, Eddie Dekel and Jhon Geanakoplos (1992), “Correlated Equilibrium with Generalized Information Structure”, *Games and Economic Behavior*, 4: 182-201.

Chen, Yi-Chun, Jeffrey C. Ely and Xiao Luo (2012), “Note on Unawareness: Negative Introspection versus AU Introspection (and KU Introspection)”, *International Journal of Game Theory*, 41: 325-329.

Dekel, Eddie, Barton L. Lipman and Aldo Rustichini (1998), “Staindard State-Space Models Preclude Unawareness”, *Econometrica*, 66: 159-173.

Fiorini, Luciana C., and José A. Rodrigues-Neto (2017), “Self-Consistency, Consistency and Cycles in Non Partitional Knowledge Models”, *Mathematical Social Sciences*, 87: 11-21.

Fukuda, Satoshi (2021), “Unawareness without AU Introspection”, *Journal of Mathematical Economics*, 94: 523-543.

Galanis, Spyros (2013), “Unawareness of Theorems”, *Economic Theory*, 52: 41-73.

———(2018), “Speculation under Unawareness”, *Games and Economic Behavior*, 109: 598-615.

Geanakoplos, John (2021), “Game Theory without Partitions, and Application to Speculation and Consensus”, *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 21: 361-394.

Heifetz, Aviad, Martin Meier and Burkhard C. Schipper (2006), “Interactive Unawareness”, *Journal of Economic Theory*, 130: 78-94.

———(2013), “Unawareness, Belief, and Speculative Trade”, *Games and Economic Behavior*, 77: 100-121.

Heinsalu, Sander (2012), “Equivalence of the Information Structure with Unawareness to the Logic of Awareness”, *Journal of Economic Theory*, 147: 2453-2468.

Karni, Edi, and Marie-Louise Vierø (2013), “"Reverse Bayesianism": A Choice-Based Theory of Growing Awareness”, *American Economic Review*, 103: 2790-2810.

Li, Jing (2009), “Information Structures with Unawareness”, *Journal of Economic Theory*, 144: 977-993.

Milgrom, Paul (1981), “An Axiomatic Characterization of Common Knowledge”, *Econometrica*, 49: 219-222.

——— and Nancy Stokey (1982), “Information, Trade and Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory*, 26: 17-27.

Modica, Salvatore, and Aldo Rustichini (1994), “Awareness and Partitional Information Structures”, *Theory and Decision*, 37: 107-124.

———(1999), “Unawareness and Partitional Information Structures”, *Games and Economic Behavior*, 27: 265-298.

Osborne, Martin J., and Ariel Rubinstein (1994), A Course in Game Theory, Cambridge: MIT Press.

Samet, Dov (1990), “Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree”, *Journal of Economic Theory*, 52: 190-207.

Schipper, Burkhard C. (2013), “Awareness-Dependent Subjective Expected Utility”, *International Journal of Game Theory*, 42-725-753.

———(2014), “Unawareness – A Gentle Introduction to Both the Literature and the Special Issue”, *Mathematical Social Sciences*, 70: 1-9.

———(2021), “Discovery and equilibrium in games with unawareness”, University of California, Davis.

Shin, Hyun Song (1993), “Logical Structure of Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory*, 60: 1-13.

Tada, Yoshihiko (2021a), “Unawareness and Reverse Symmetry: Aumann Structure with Complete Lattice”, Chuo University.

———(2021b), “Note: AU Introspection and Symmetry under Non-Trivial Unawareness”, mimeo.