Discussion Paper No.359

Non-Trivial Unawareness in (Non-)Partitional Standard Information Structures

Yoshihiko Tada
Chuo University
Economic Reserch Institute,
Associate Researcher

December 2021

INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

Non-Trivial Unawareness in (Non-) Partitional Standard Information Structures[1]

多田由彦

中央大学大学院経済学研究科博士後期課程

2021 年 11 月 25 日

要旨

本稿は標準的な情報構造を用いても無意味でない不可知を取り扱うことが可能であることを示す．先行研究では標準的な情報構造で不可知を議論した場合に，不可知は無意味なものとなってしまうことを指摘してきた．しかしながら，その無意味性は標準的な知識演算子の定義から導かれるものである．我々は知識演算子の定義を変えることによって標準的な情報構造上であったとしても，不可知を有意味に議論することが可能であることを証明した．我々は先行研究と異なる結論を導き出したけれども，主観的状態空間が客観的状態空間と一致するところでは，先行研究の結論と一致することも示した．この点から我々の知識演算子の定義は標準的な知識演算子の定義を一般化したものであると主張することができる．

キーワード：Information, Knowledge, Unawareness, Triviality, Symmetry.

I　イントロダクション

本稿は標準的な情報構造を用いても無意味でない不可知を取り扱うことが可能であることを示す．標準的な分割的情報構造モデルでは，共通知識の仮定を

[1] 本稿は Tada (2021a) に対する匿名の査読者からいただいたコメントに基づいて論文の再構成を行なった．匿名の査読者に感謝する．

設けた場合, Aumann (1976) の事後確率一致定理や Milgrom and Stokey (1982) の無取引定理などが成立していた．この結論を避けるために，先行研究では知識の欠落に焦点を当てて，非分割的情報構造を想定して共通知識の仮定を外して分析を行なった, e.g., Samet (1990), Brandenburger, Dekel, and Geanakoplos (1992), Shin (1993), Geanakoplos (2021)．しかしながら，Dekel, Lipman, and Rustichini (1998) は不可知の性質である Plausibility, KU Introspection, AU Introspection を仮定した場合，知識演算子が Necessitation を満たすならば Triviality が成立し，Monotonicity を満たすならば Unawareness Leads to Ignorance が成立することを示した．標準的な知識演算子は必ず Necessitation と Monotonicity を成立させるから，この結論は標準的な情報構造では不可知を有意味に議論することができないことを意味する.[2] [3] 不可知を有意味に議論するために, Heifetz, Meier, and Schipper (2006) は概念の欠落に焦点を当てて不可知構造モデルを提案し，有意味に不可知を議論することをできるようにした．その後，不可知の研究は概念の欠落に関するものが主となった, e.g., Heifetz, Meier, and Schipper (2008, 2013), Li (2009), Heinsalu (2012), Schipper (2013, 2014), Galanis (2013, 2018).[4]

しかしながら，知識の欠落に焦点を当てた不可知の研究を捨てることは尚早であるように思われる．例えば，Fukuda (2021) は AU Introspection を仮定し

[2] 標準的な情報構造における不可知の無意味性を指摘した他の研究としては, Modica and Rustichini (1994, 1999) や Chen, Ely, and Luo (2012) がある.

[3] なお, Tada (2021c) は非標準的な情報構造の上で不可知を議論した場合には, Unawareness Leads to Ignorance は有意味な不可知の性質となりうることを指摘している.

[4] 不可知に関するサーベイとしては Schipper (2014, 2015) が挙げられる.

なければ標準的な情報構造でも不可知を議論することが可能であることを指摘した．そもそも標準的な情報構造における不可知の無意味性は知識演算子の定義から導かれるものである．標準的な知識演算子の場合，その定義から Necessitation と Monotonicity が必ず成立する．そのため，Plausibility, KU Introspection, AU Introspection を仮定したとき，不可知の議論は無意味なものとなってしまう．しかしながら Dekel, Lipman, and Rustichini (1998) が指摘したように，知識演算子がこれらの性質を満たさないならば，不可知を有意味に議論することができるようになる．我々は標準的な情報構造であったとしても，Necessitation と Monotonicity が成立しなくなるような知識演算子をモデル化する．

モデル化にあたって，我々はまず客観的状態空間の部分集合となる主観的状態空間を定義した．そして主観的状態空間と関連づけて知識演算子を定義しなおした．標準的な知識演算子の場合，主観的状態空間と関連づけられることなく定義される．これに対して我々は，通常の定義に加えて，各事象が主観的状態空間の部分集合であるときに限り，主体はその事象を知っているものと定義し，その事象が主観的状態空間の部分集合でない場合には，主体はその事象を知らないものと定義した．これにより Necessitation と Monotonicity を満たさないような一般化知識演算子を扱うことを可能にした．

我々は不可知演算子を一般化知識演算子に基づいて定義した．一般化不可知演算子はほとんどの性質については先行研究と同様に成立するが，我々の一般化不可知演算子は不可知が有意味であるところでは，Symmetry と A-Conjunction は成立しない．これは先行研究と異なる点である．しかしながら我々のこの結論は決して先行研究と不整合であるとは言えない．例えば Modica and Rustichini (1994, 1999) や Tada (2021b) などは Symmetry を仮

定して分析しているのであって，常に成立することを示しているわけではない．従って，Symmetry が成立しないケースのもとで，有意味な不可知を議論することは可能なのである．

我々の一般化知識演算子は標準的な知識演算子とは異なるものであるけれども，主観的状態空間と客観的状態空間が一致するところでは同じ性質を導く．従って，標準的な情報構造で示されてきた Triviality Theorems（Modica and Rustichini 1994, Dekel, Lipman, and Rustichini 1998, Chen, Ely, and Luo 2012）についても，主観的状態空間と客観的状態空間が一致するところでは成立する．これは我々のモデルが標準的なモデルを一般化したものであることを示している．

本稿は次のように構成されている．II 節では標準的な情報構造を定義し，その上で一般化知識演算子を定義する．III 節では一般化知識演算子に基づいて一般化不可知演算子を定義し，その性質について特徴づけを行なった．IV 節では Triviality Theorems の一般化を行い，我々のモデルが標準的なモデルを一般化したものであることを示した．最後に V 節では結論を述べている．

II　準備

2.1 標準的な情報構造

本節ではまず標準的な情報関数の定式化を行う．有限な世界の状態の集合（状態空間）を Ω と記し，$\omega \in \Omega$ を世界の状態とする．事象は $E \subseteq \Omega$ と記し，$\neg E = \Omega \setminus E$ とする．主体の情報関数を $P\colon \Omega \to 2^{\Omega} \setminus \{\emptyset\}$ とする．任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$P(\omega) \neq \emptyset$ は明らかである．言い換えれば任意の情報集合は非空となる．このとき $\langle \Omega, P \rangle$を情報構造と呼ぶ．

ここで Ω を客観的状態空間と呼び，主観的状態空間 $X \subseteq \Omega$ を以下のように

定義する[5]:

$$X = \bigcup_{\omega \in \Omega} P(\omega).$$

通常の情報構造モデルではこのとき情報集合の性質を以下のように設ける.

P1　任意の $\omega \in X$ に対して，$\omega \in P(\omega)$.

P2　$\omega' \in P_i(\omega)$ ならば $P_i(\omega') \subseteq P_i(\omega)$.

P3　$\omega' \in P_i(\omega)$ ならば $P_i(\omega') \supseteq P_i(\omega)$.

注釈 1：情報関数 P が P1 を満たすものと仮定する. このとき，$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り, (P1*) 任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in P(\omega)$.

通常の情報関数では P1* を仮定する. P1 は P1*を緩めたものであることは明らかである. このとき分割に対して以下のように定義する.

定義 1：情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が P1*, P2, P3 を満たすとき，P は分割的(partitional) であると呼ぶ. 情報関数 P が P1, P2, P3 を満たすとき，P は部分的分割的（partially partitional）であると呼ぶ.

[5] 主観的状態空間のこの定義は Fiorini and Rodrigues-Neto (2017) を参照した. 留意すべきは，我々は主観的状態空間が客観的状態空間の部分集合であることを要求しているのに対して，彼らは主観的状態空間が客観的状態空間の上位集合であるかもしれないことを認めている.

2.2 一般化知識演算子

次に一般化知識演算子 $K\colon 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ について考える．任意の状態 $\omega \in \Omega$ と事象 $E \subseteq \Omega$ をとったとき， $K(E)$ を以下のように定義する:

$$\begin{cases} \omega \in K(E) \text{ if } P_i(\omega) \subseteq E \text{ and } E \subseteq X; \text{ and} \\ K_i(E) = \emptyset \text{ otherwise.} \end{cases}$$

$\omega \in \Omega$ を与える．このとき任意の事象 $E \subseteq \Omega$ に対して，$\omega \in K_i(E)$ が成立するとき，"主体は ω で E を知っている" と解釈し，$\omega \notin K_i(E)$ が成立するとき，"主体は ω で E を知らない" と解釈する．通常の議論では，主観的状態空間 X を含めて知識演算子を定義しないが，本稿では主観的状態空間も考慮に入れて定義する．この定義では与えられた事象に対して，情報集合が部分集合となっているだけでなく，その事象が主観的状態空間の部分集合であることも含める．それが成立しないときは，すなわち $E \nsubseteq X$ のときもまた主体は E について知らないものと考える．このとき，以下の命題が成立する．

命題 1：情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，一般化知識演算子 K は以下の性質を満たす.

K1 (Necessitation)：$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $K(\Omega) = \Omega$;

K2 (Monotonicity)：$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $E \subseteq F \Longrightarrow K(E) \subseteq K(F)$;

K3 (Conjunction)：$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$;

K4 (Truth)：P が P1 を満たすならば，$K(E) \subseteq E$;

K5 (Positive Introspection)：P が P2 を満たすならば，$K(E) \subseteq KK(E)$; and

K6 (Negative Introspection)：$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り P が P3 を満たすならば，$\neg K(E) \subseteq K \neg K(E)$.

注釈 2:　K3 は K2 を導く.

注釈 3:　任意の $E, F \subseteq X$ に対して，

K2’ $E \subseteq F \implies K(E) \subseteq K(F)$; and

K3’ $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$.

通常の知識演算子の場合, Necessitation, Monotonicity, Conjunction は必ず成立する．Heifetz, Meier, and Schipper（2006）や Li（2009）においても，Necessitation, Monotonicity, Conjunction は必ず成立した．対照的に本稿の一般化知識演算子は主観的状態空間が客観的状態空間と一致しない場合には Necessitation, Monotonicity, Conjunction は成立しない．この点は我々の知識演算子の最大の特徴である．また通常の知識演算子は情報関数が P3 を満たすならば，Negative Introspection は必ず成立するが，一般化知識演算子の場合，主観的状態空間は客観的状態空間と一致しなくてはならない.

III　一般化不可知演算子

本節では一般化不可知演算子 $U: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ を以下のように定義する[6]:

[6] この定義は Modica and Rustichini (1994) の定義でもある.

$$U(E) = \neg K(E) \cap \neg K \neg K(E).$$

Dekel, Lipman, and Rustichini（1998）提案した Plausibility（$U(E) \subseteq \neg K(E) \cap \neg K \neg K(E)$）は我々の定義から明らかに成立する．一般化可知演算子 $A: 2^{\Omega} \to 2^{\Omega}$ は，$A(E) = \neg U(E)$ と定義する．このとき一般化不可知演算子の無意味性は以下のように示される．

補題 1：情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．このとき一般化知識演算子 U は以下の性質を満たす．任意の $E \subseteq \Omega$ に対して，

- Triviality：$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り，$A(E) = \Omega$; and
- Non-Triviality：$X \neq \Omega$ のとき，かつそのときに限り，$A(E) = K(E)$．さらに $E \nsubseteq X$ または $E = \emptyset$ が成立するとき，かつそのときに限り，$A(E) = \emptyset$.

注釈 4：情報関数が部分的分割的でないときは，主観的状態空間が客観的状態空間と一致していたとしても Triviality は成立しないかもしれない．

以上の補題から以下の命題が成立する．

命題 2：情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．このとき一般化不可知演算子 U は以下の性質を満たす．

U1 (KU Introspection)：$KU(E) = \emptyset$;

U2 (AU Introspection)：$U(E) \subseteq UU(E)$;

U3 (Weak Necessitation)：$X = \Omega$ ならば $A(E) = K(X)$;

U4 (Strong Plausibility)：$U(E) = \bigcap_{n=1}^{\infty} (\neg K)^n (E)$;

U5 (Weak Negative Introspection)：$\neg K(E) \cap A\neg K(E) = K\neg K(E)$;

U6 (Symmetry)：$X = \Omega$ ならば，$U(E) = U(\neg E)$;

U7 (A-Conjunction)：任意の λ に対して $E_\lambda \subseteq X$ ならば，$A(\cap_\lambda E_\lambda) = \cap_\lambda A(E_\lambda)$;

U8 (AK-Self Reflection)：$AK(E) = A(E)$;

U9 (AA-Self Reflection)：$AA(E) = A(E)$; and

U10 (A-Introspection)：$KA(E) = A(E)$.

命題 3：情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．このとき一般化不可知演算子 U は以下の性質を満たす．任意の事象 $E \neq \emptyset$ に対して，

U2' (Reverse AU Introspection)：

1. $X = \Omega$ ならば，$UU(E) \subseteq U(E)$; and
2. $X \neq \Omega$ かつ $E \nsubseteq X$ ならば，$UU(E) \subseteq U(E)$.

U3' (Reverse Weak Necessitation)：$X \neq \Omega$ かつ $E \neq X$ ならば $A(E) \neq K(X)$.

U6' (Reverse Symmetry)：$X \neq \Omega$ のとき，

1. $E \subseteq X$ ならば，$U(E) \subseteq U(\neg E)$; and
2. $E \nsubseteq X$ ならば，$U(E) \supseteq U(\neg E)$．等号条件は $\neg E \nsubseteq X$.

U7' (Reverse A-Conjunction)：$X \neq \Omega$ のとき，任意の λ に対して $E_\lambda \subseteq X$ かつ任意の δ に対して $E_\delta \nsubseteq X$ ならば，$A(\cap_\lambda E_\lambda) \supseteq \cap_\lambda A(E_\lambda)$.

U1-4 は Dekel, Lipman, and Rustichini (1998) が提案した．U6-9 は Modica and Rustichini (1994, 1999) が提案した．U5-9 は Halpern (2001) が提案した．U10 は Heifetz, Meier, and Schipper (2006) が提案した．U2' は Fukuda (2021) が提案した．

本稿が新たに示したのは，Reverse Weak Necessitation（U3'），Reverse Symmetry（U6'），Reverse A-Conjunction（U7'）である．主観的状態空間と客観的状態空間が一致しないとき，U3, U6, U7 は成立しないかもしれない．任意の事象が主観的状態空間の部分集合である場合は，Symmetry は必ず成立しない．事象が主観的状態空間の部分集合でないとき，その反対事象が主観的状態空間の部分集合でないならば，Symmetry が成立するのに対して，その反対事象が主観的状態空間の部分集合であるならば，Symmetry は成立しない．また，主観的状態空間が客観的状態空間と一致しないとき，A-Conjunction が成立する条件は全ての事象が主観的状態空間に属しているか，全ての事象が主観的状態空間に属していないかのいずれかである．

Reverse Symmetry の含意について考えよう．我々のモデルでは主観的状態空間と客観的状態空間が一致しないところでは Symmetry が成立しない事象が必ず存在する．これは状態空間の部分集合しか認識できない主体は，認識可能な事象の反対事象を認識することができないことを意味している．この性質は決して記号的な性質ではなく，現実世界でも起こりうることである．

例：二人の労働者 Alice と Bob を考える．二人はそれぞれ別の場所で働いており，互いの存在を知らないとする．ある日，雇用者が今後の契約について次のことを考えていたとする．

ω_1：Alice と Bob の二人をクビにする．

ω_2：Alice だけをクビにする．

ω_3：Bob だけをクビにする．

ω_4：誰もクビにしない．

ここで Alice は Bob の存在を知らないから，彼女は自分がクビになるか（ω_2），クビにならないか（ω_4）のいずれかしか知らない．このとき，いずれの場合であっても, Bob がクビになったのかどうか（ω_1, ω_3）については知ることができない．すなわち，事象 $\{\omega_2, \omega_4\}$ に可知であったとしても，事象 $\{\omega_1, \omega_3\}$ については不可知なままである．■

そもそも Reverse Symmetry は知識演算子の定義から導かれたものである．もし Reverse Symmetry が作為的なものであるならば，知識演算子の定義が作為的であるということになる．すなわち，主観的状態空間に属していない事象に対しては空集合が与えられるという定義が作為的であるということになる．しかしながら，主観的状態空間に属していない知識に対して，主体が何かしらの知識を持っていることはいささかおかしな話である．従って，認識できていない事象に対して空集合が与えられることは決して作為的であるとは言えない．

多くの先行研究では Symmetry が成立することを証明するか，それを仮定して分析されてきた，e.g., Modica and Rustichini (1994, 1999), Halpern (2001), Heifetz, Meier, and Schipper (2006, 2008, 2013), Li (2009), Sadzik (2021), and Tada (2021b)．では，Reverse Symmetry は先行研究と整合的でない性質なのだろうか? 結論を言えば，そうではない. Modica and Rustichini (1994) は知識演算子が Necessitation, Monotonicity, Truth, Positive Introspection が成立しているとき, Symmetry と Negative Introspection が同値であることを示した．すなわち，Necessitation もしくは Monotonicity が成立しないところでは Symmetry と Negative Introspection は同値にはならないのである．しかしこれは有意味な不可知について議論するとき, Symmetry が必ず成立することを保

証するわけではない.また Tada (2021b) は Monotonicity, Truth, Positive Introspection が成立するところでは AU Introspection と Symmetry が同値であることを証明した．しかし本稿のモデルでは，主観的状態空間と客観的状態空間が一致しないところでは，Monotonicity が成立しない．従って，AU Introspection と Symmetry の同値性を保証しない．以上から我々は有意味な不可知を考えるにあたって, Symmetry が成立しないかもしれない状況が存在すること自体は何ら問題ないのである.[7]

IV　Generalized Triviality Theorems

Modica and Rustichini (1994), Dekel, Lipman, and Rustichini (1998), Chen, Ely, and Luo (2012) は Triviality Theorem について検討を加えてきた．本節では Triviality Theorem の再検討と一般化を行う．

定理 1：(Modica and Rustichini 1994) 情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．$X = \Omega$ が成立するとき，かつそのときに限り，任意の事象に対して Symmetry が成立する．

定理 2：(Dekel, Lipman, and Rustichini 1998) 情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．このとき，以下は同値である．

[7] 著者は匿名の査読者に感謝する．匿名の査読者は Reverse Symmetry の興味深さには同意をしたものの，その性質が有意義であると結論づけることには慎重になるようにと示唆してくれた．この段落の主張は Reverse Symmetry に対する再考によって生まれたものである．

1. $X = \Omega$;
2. Triviality: $U(E) = \emptyset$; and
3. Unawareness Leads to Ignorance: $\forall E, F \subseteq X,\ U(E) \subseteq \neg K(F)$.

定理 3：（Chen, Ely, and Luo 2012）情報構造 $\langle \Omega, P \rangle$ において，情報関数 P が部分的分割的であるとする．このとき，以下は同値である．

1. $X = \Omega$;
2. Symmetry, AU Introspection, Negative Introspection が同値である．

先行研究では Plausibility, AU Introspection, KU Introspection が仮定されているとき，知識演算子が Necessitation, Monotonicity が仮定されたならば不可知は無意味なものとなることが示されてきた．そして標準的な知識演算子では Necessitation, Monotonicity が必ず成立するので不可知の無意味性は常に成立する．我々の知識演算子の場合，主観的状態空間と客観的状態空間が一致するところでは，不可知の無意味性が常に成立する．しかしながら，主観的状態空間と客観的状態空間が一致しないところでは，Plausibility, KU Introspection, AU Introspection が成立しているにもかかわらず，不可知の無意味性は保証されない．なぜならこの場合には，Necessitation と Monotonicity が成立しないからである．すなわち，主観的状態空間と客観的状態空間が一致するところでは Triviality Theorems が成立し，そうでないところでは情報関数が部分的に分割的であったとしても Triviality Theorems が成立しないのである．この結論は，我々のモデルが標準的な情報構造モデルを一般化したものであることを指す．

V　結論

本稿は標準的な（非分割的）情報構造を用いても有意味な不可知の分析が可能であることを示した．Dekel, Lipman, and Rustichini (1998) が示したように，Plausibility, KU introspection, AU Introspection を仮定した場合，知識演算子がNecessitation, Monotonicity を満たしている場合には不可知が無意味なものとなるが，標準的な知識演算子は必ず Necessitation と Monotonicity を満たすから，彼らの Triviality Theorem は必ず成立してしまう．これに対して我々のモデルでは，知識演算子が Necessitation と Monotonicity が成立するための必要十分条件は主体の主観的状態空間が客観的状態空間と一致することであった．我々の不可知演算子は Plausibility, KU Introspection, AU Introspection が必ず成立するけれども，主観的状態空間と客観的状態空間が一致しない場合には，Necessitation と Monotonicity が成立しないので，有意味に不可知を議論することができる．

なお，我々の知識演算子，不可知演算子は以下の点で特徴的なものとなっている．まず主観的状態空間と客観的状態空間が一致しないところでは，Symmetry と A-Conjunction が成立することを保証しない．この点はいくつかの先行研究とは異なる結論である, e.g., Heifetz, Meier, and Schipper (2006), Li (2009)．しかしながら, Symmetry が成立しないことは決して先行研究と不整合であるわけではない．標準的なモデルにおいても Symmetry が成立しないことを想定することは可能である．

本稿の結論は先行研究と異なる点を持つけれども，主観的状態空間と客観的状態空間が一致するところでは，標準的な情報構造における不可知演算子の議論と同様の結論を得る．従って，我々のモデルは標準的な議論を一般化したものであると言える．

本稿は主体の知識や可知に焦点を当てた分析を行なった．しかしながら，意

思決定に関わる状況については考察をしていない．標準的な（非分割的）情報構造を用いて意思決定を分析したものとして，Brandenburger, Dekel, and Geanakoplos (1992), Geanakoplos (2021) などが挙げられる．今後，相互作用が伴うような意思決定の状況に対して，我々のモデルを用いてこれらの先行研究を一般化した研究を行うことが課題となる．また，不可知研究それ自体の課題として応用可能性の問題がある．現状では不可知の議論はいまだに応用可能性に乏しい状況である．我々のモデルを経済学の文脈で活かせるかどうかについても今後検討していく必要があるだろう．

補論：証明

注釈 1：$X = \Omega$ の時は明らか．$X \neq \Omega$ を仮定する．このとき，$\omega \notin P(\omega)$ であるような $\omega \in \Omega$ が存在する．従って（P1*）は満たされない．■

命題 1：(K1) $X \subseteq \Omega$ は明らかである．$X = \Omega$ のとき，任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$P(\omega) \subseteq \Omega$ を必ず満たすから，$\omega \in K(\Omega)$．従って，$\Omega \subseteq K(\Omega)$ より $K(\Omega) = \Omega$．$X \neq \Omega$ のとき，$\Omega \nsubseteq X$ は明らかであるから，知識演算子の定義より $K(\Omega) = \emptyset$．
(K3) $X = \Omega$ を仮定する．任意の $\omega \in K(E \cap F)$ をとる．このとき，$P(\omega) \subseteq E$ かつ $E \subseteq X$ と $P(\omega) \subseteq F$ かつ $F \subseteq X$ が成立している．すなわち，$\omega \in K(E)$ かつ $\omega \in K(F)$ より，$\omega \in K(E) \cap K(F)$．従って $K(E \cap F) \subseteq K(E) \cap K(F)$．任意の $\omega \in K(E) \cap K(F)$ をとる．このとき，$\omega \in K(E)$ かつ $\omega \in K(F)$ が成立している．これは $(\omega) \subseteq E$ かつ $E \subseteq X$ と $P(\omega) \subseteq F$ かつ $F \subseteq X$ を意味するから，$(\omega) \subseteq E \cap F$ かつ $E \cap F \subseteq X$．すなわち $\omega \in K(E \cap F)$ より $K(E) \cap K(F) \subseteq K(E \cap F)$．以上から $K(E \cap F) = K(E) \cap K(F)$．$X \neq \Omega$ を仮定する．ここで $F = \Omega$ とする．このとき $K(E \cap \Omega) = K(E)$ であるのに対して，$K(E) \cap K(\Omega) =$

$K(E)\cap\emptyset=\emptyset$. 従って $K(E\cap F)\neq K(E)\cap K(F)$.

(K2) $X=\Omega$, $E\subseteq F$ を仮定する．このとき，$K(E)=K(E\cap F)=K(E)\cap K(F)\subseteq K(F)$. $X\neq\Omega$ のとき，$F=\Omega$ ならば，$K(\Omega)=\emptyset$. 従って，$K(E)\nsubseteq K(F)$.

(K4) P1 が成立していると仮定する．任意の $\omega\in K(E)$ をとる．このとき $P(\omega)\subseteq E$ かつ $E\subseteq X$ が成立する. P1 より $\omega\in P(\omega)\subseteq E$ であるから，$K(E)\subseteq E$.

(K5) P2 が成立していると仮定する．任意の $\omega\in K(E)$ をとる．このとき $P(\omega)\subseteq E$ かつ $E\subseteq X$ が成立する．ここで任意の $\omega'\in P(\omega)$ をとる. P2 より $P(\omega')\subseteq P(\omega)$ であるから，$P(\omega')\in E$. 従って，$\omega'\in K(E)$. すなわち $P(\omega)\subseteq K(E)$ が成立する．以上より $K(E)\subseteq KK(E)$.

(K6) $X=\Omega$, P3 が成立すると仮定する．任意の $\omega\in\neg K(E)$ をとる．このとき，$\omega\notin K(E)$ であるから $P(\omega)\nsubseteq E$. 任意の $\omega'\in P(\omega)$ に対して P3 より，$P(\omega')\supseteq P(\omega)$ であるから，$P(\omega')\nsubseteq E$，$\omega'\notin K(E)$，すなわち $\omega'\in\neg K(E)$. 従って $P(\omega)\subseteq\neg K(E)$. 以上より $\neg K(E)\subseteq K\neg K(E)$. $X\neq\Omega$ のとき，$\neg K(\Omega)=\Omega$ であるから，$K\neg K(\Omega)=K(\Omega)=\emptyset$. 従って $\neg K(E)\nsubseteq K\neg K(E)$. ■

注釈 3：任意の $E,F\subseteq X$ をとる.

(K3') 任意の $\omega\in K(E\cap F)$ に対して $P(\omega)\subseteq E\subseteq X$ かつ $P(\omega)\subseteq F\subseteq X$ が成立するから，$\omega\in K(E)$ かつ $\omega\in K(F)$. 従って $K(E\cap F)\subseteq K(E)\cap K(F)$. 任意の $\omega\in K(E)\cap K(F)$ をとる．このとき $P(\omega)\subseteq E\subseteq X$ かつ $P(\omega)\subseteq F\subseteq X$ が成立するから，$P(\omega)\subseteq E\cap F\subseteq X$ より $\omega\in K(E\cap F)$. 従って $K(E\cap F)\supseteq K(E)\cap K(F)$. 以上より $K(E\cap F)=K(E)\cap K(F)$.

(K2') Conjunction は Monotonicity を導く.

補題 1：情報関数が部分的分割的であるとする．$X = \Omega$ を仮定する．P3 を仮定しているから Negative Introspection が成立する．すなわち $U(E) = \emptyset$．従って $A(E) = \Omega$．$X \neq \Omega$ のとき，Negative Introspection が成立しないので $A(E) \neq \Omega$ となるような E が存在するかもしれない．ここで $E \subseteq X$ かつ $E \neq \emptyset$ のとき，Truth より $K(E) \subseteq E \subseteq X$ が成立するから $\neg K(E) \nsubseteq X$．すなわち $K\neg K(E) = \emptyset$．従って，$A(E) = K(E) \cup K\neg K(E) = K(E)$．$E = \emptyset$ のとき $K(E) = A(E) = \emptyset$ は明らか．$E \nsubseteq X$ のとき $K(E) = \emptyset$ より $\neg K(E) = \Omega$．このとき $K\neg K(E) = K(\Omega) = \emptyset$ であるから $\neg K\neg K(E) = \Omega$．従って $U(E) = \neg K(E) \cap \neg K\neg K(E) = \Omega$ より $K(E) = A(E) = \emptyset$．■

注釈 4：P3 が成立しないとき，Negative Introspection は成立しない．従って Triviality は成立しない．■

命題 2：$X = \Omega$ のときは U1-10 が満たされることは明らかである．$X \neq \Omega$ を仮定する．このとき，補題 1 より $A(E) = K(E)$．すなわち $U(E) = \neg K(E)$

（U1）$E \subseteq X$ のとき，$\neg K(E) \nsubseteq X$ である．従って $KU(E) = K\neg K(E) = \emptyset$．$E \nsubseteq X$ のときは $U(E) = \Omega$ であるから $KU(E) = K(\Omega) = \emptyset$.

（U2）$UU(E) = \neg KU(E) \cap \neg K\neg KU(E)$．U1 より $\neg KU(E) \cap \neg K\neg KU(E) = \Omega \cap \neg K(\Omega) = \Omega$．従って，$UU(E) = \Omega$ であるから $U(E) \subseteq UU(E)$.

（U4）任意の E に対して，$\neg K\neg K(E) = \neg KU(E) = \Omega$ である．同様に $\neg K\neg K\neg K(E) = \neg K\neg KU(E) = \neg K(\Omega) = \Omega$ が成立する．これを繰り返すと $\cap_{n=2}^{\infty} (\neg K)^n(E) = \Omega$ である．従って，$U(E) = \neg K(E) = \neg K(E) \cap_{n=2}^{\infty} (\neg K)^n(E) = \cap_{n=1}^{\infty} (\neg K)^n(E)$.

（U5）$K\neg K(E) = KU(E) = \emptyset$．$A\neg K(E) = K\neg K(E) = \emptyset$．従って，$\neg K(E) \cap$

$A\neg K(E) = K\neg K(E)$.

(U7) $X \neq \Omega$ のとき，$A(E) = K(E)$ である．従って，$A(\cap_\lambda E_\lambda) = K(\cap_\lambda E_\lambda)$，$\cap_\lambda A(E_\lambda) = \cap_\lambda K(E_\lambda)$．ここで任意の λ に対して $E_\lambda \subseteq X$ ならば，注釈 3 より Conjunction が成立するから $A(\cap_\lambda E_\lambda) = K(\cap_\lambda E_\lambda) = \cap_\lambda K(E_\lambda) = \cap_\lambda A(E_\lambda)$.

(U8-10) P は部分的分割的であるから，K は Truth と Positive Introspection が成立する．従って $A(E) = K(E) = KK(E) = KA(E) = AA(E) = AK(E)$. ■

命題 3：$E \neq \emptyset$ とする.

(U2') $X = \Omega$ のとき，$U(E) = \emptyset$ であるから，$UU(E) = U(\emptyset) = \emptyset$．従って，$UU(E) \subseteq U(E)$．$X \neq \Omega$ かつ $E \nsubseteq X$ とする．このとき，$U(E) = \Omega$ であるから $UU(E) \subseteq U(E)$.

(U6') $X \neq \Omega$ とする．$E \subseteq X$ ならば $\neg E \nsubseteq X$ であるから，$U(\neg E) = \Omega$. 従って $U(E) \subseteq U(\neg E)$．$E \nsubseteq X$ ならば $U(E) = \Omega$ より $U(E) \supseteq U(\neg E)$．ここで $\neg E \nsubseteq X$ ならば $U(\neg E) = \Omega$ であるから $U(E) = U(\neg E)$.

(U7') $X \neq \Omega$ とする．任意の λ に対して $E_\lambda \subseteq X$，任意の δ に対して $E_\delta \nsubseteq X$ とする．このとき，$A(E_\delta) = \emptyset$ であるから，$\cap_\lambda A(E_\lambda) \cap_\delta A(E_\delta) = \cap_\lambda A(E_\lambda) \cap \emptyset = \emptyset$. 従って，$A(\cap_\lambda E_\lambda \cap_\delta E_\delta) \supseteq \cap_\lambda A(E_\lambda) \cap_\delta A(E_\delta)$. ■

定理 1：$X = \Omega$ のとき，命題 2 より任意の事象に対して Symmetry が成立する. $X \neq \Omega$ のとき，命題 3 より Symmetry が成立しない事象が存在する. ■

定理 2：$X = \Omega$ のとき，補題 1 より Triviality が成立する. Triviality が成立するとき, Unawareness Leads to Ignorance が成立するのは明らか. Unawareness Leads to Ignorance が成立すると仮定する．ここで $X \neq \Omega$ と仮定する．このと

き，$U(\Omega)=\Omega$ であるから，$U(E)\nsubseteq\neg K(F)$ となるような F が存在する．これは矛盾である．従って $X=\Omega$.

定理 3：$X=\Omega$ のとき，命題２より Symmetry, AU Introspection, Negative Introspection が成立する．$X\neq\Omega$ のとき, Symmetry と Negative Introspection は成立しない．しかしながら AU Introspection は必ず成立するので３つの性質は同値ではない．■

引用文献

Aumann, Robert J. (1976), “Agreeing to Disagree”, *The Annals of Statistics*, 4: 1236-1239.

Brandenburger, Adam, Eddie Dekel and Jhon Geanakoplos (1992), “Correlated Equilibrium with Generalized Information Structure”, *Games and Economic Behavior*, 4: 182-201.

Chen, Yi-Chun, Jeffrey C. Ely and Xiao Luo (2012), “Note on Unawareness: Negative Introspection versus AU Introspection (and KU Introspection)”, *International Journal of Game Theory*, 41: 325-329.

Dekel, Eddie, Barton L. Lipman and Aldo Rustichini (1998), “Staindard State-Space Models Preclude Unawareness”, *Econometrica*, 66: 159-173.

Fagin, Ronald, and Joseph Y. Halpern (1988), “Belied, Awareness and Limited Reasoning”, *Artificial Intelligence*, 34: 39-76.

Fiorini, Luciana C., and José A. Rodrigues-Neto (2017), “Self-Consistency, Consistency and Cycles in Non Partitional Knowledge Models”, *Mathematical Social Sciences*, 87: 11-21.

Fukuda, Satoshi (2021), "Unawareness without AU Introspection", *Journal of Mathematical Economics*, 94: 523-543.

Galanis, Spyros (2013), "Unawareness of Theorems", *Economic Theory*, 52: 41-73.

———(2018), "Speculation under Unawareness", *Games and Economic Behavior*, 109: 598-615.

Geanakoplos, John (2021), "Game Theory without Partitions, and Application to Speculation and Consensus", *The B.E. Journal of Theoretical Economics*, 21: 361-394.

Halpern, Joseph Y., (2001), "Alternative Semantics for Unawareness", *Games and Economic Behavior*, 37: 321-339.

Heifetz, Aviad, Martin Meier and Burkhard C. Schipper (2006), "Interactive Unawareness", *Journal of Economic Theory*, 130: 78-94.

———(2008), "A Canonical Model for Interactive Unawareness", *Games and Economic Behavior*.

———(2013), "Unawareness, Belief, and Speculative Trade", *Games and Economic Behavior*, 77: 100-121.

Heinsalu, Sander (2012), "Equivalence of the Information Structure with Unawareness to the Logic of Awareness", *Journal of Economic Theory*, 147: 2453-2468.

Li, Jing (2009), "Information Structures with Unawareness", *Journal of Economic Theory*, 144: 977-993.

Milgrom, Paul, and Nancy Stokey (1982), "Information, Trade and Common Knowledge", *Journal of Economic Theory*, 26: 17-27.

Modica, Salvatore, and Aldo Rustichini (1994), "Awareness and Partitional Information Structures", *Theory and Decision*, 37: 107-124.

———(1999), “Unawareness and Partitional Information Structures”, *Games and Economic Behavior*, 27: 265-298.

Samet, Dov (1990), “Ignoring Ignorance and Agreeing to Disagree”, *Journal of Economic Theory*, 52: 190-207.

Sadzik, Tomasz, (2021), “Knowledge, Awareness, and Probabilistic Beliefs”, The B.E. Journal of Theoretical Economics, 21: 489-524.

Schipper, Burkhard C. (2013), “Awareness-Dependent Subjective Expected Utility”, *International Journal of Game Theory*, 42-725-753.

———(2014), “Unawareness – A Gentle Introduction to Both the Literature and the Special Issue”, *Mathematical Social Sciences*, 70: 1-9.

———(2015), “Awareness” in van Ditmarsh, H., J.Y. Halpern, W. van der Hoek, B.P. Kooi ed., *Handbook of Epistemic Logics, College Publication*, 77-146.

Shin, Hyun Song (1993), “Logical Structure of Common Knowledge”, *Journal of Economic Theory*, 60: 1-13.

Tada, Yoshihiko (2021a), “Unawareness and Reverse Symmetry: Aumann Structure with Complete Lattice”, Chuo University.

———(2021b), “Note: AU Introspection and Symmetry under Non-Trivial Unawareness”, mimeo.

———(2021c), “Is “Unawareness Leads to Ignorance” Trivial?”, mimeo.