Discussion Paper No. 393

フォーカルポイントの定式化

中央大学経済学部
多田　由彦

October　2023

INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH
Chuo University
Tokyo, Japan

フォーカルポイントの定式化

多田由彦（中央大学）

2023 年 10 月 18 日

1. イントロダクション

プレイヤーたちがコーディネーションゲームにおいて意思決定をするとき，相手が特定の均衡に注目していることを信じて，意思決定を行うことがあるかもしれない．すべてのプレイヤーがその均衡に注目し，互いにそれを注目していることを信じている場合，そのような均衡を Schelling (1960) はフォーカルポイント（focal point）と名付けた．フォーカルポイントは多くの文献で参照される概念である．しかしながらその数理的かつ静学的な定式化については Bacharach (1993), Bacharach and Bernasconi (1997), Bacharach and Stahl (2000) の可変フレーム理論を除けばないように思われる．

本稿は可変フレーム理論における分割のアイデアを参考にして，抽象的な状態空間モデルにおいてフォーカルポイントを定式化し，その特徴を述べる．

2. 準備

2.1 ゲームの定義と状態空間

まずゲーム $G = (I, \{S_i\}_{i\in I}, \{u_i\}_{i\in I})$ を定義する．I はプレイヤーの集合である．S_i はプレイヤー i の戦略集合であり，プレイヤー i の戦略を $s_i \in S_i$ と表す．直積集合 $S = \times_{i\in I} S_i$ について，$s = (s_i)_{i\in I} \in S$ を戦略プロファイルとする．任意の $i \in I$ に対して，$u_i: S \to \mathbb{R}$ を i の効用関数とおく．

続いてゲーム G における情報構造 (Ω, Π_i) について考える．Ω は状態空間であり，各プレイヤー i ごとに Ω 上で分割が定義されているものと仮定する．プレイヤー i の Ω 上の分割を $\mathcal{Q}_i$ と記す．続いてプレイヤー i の情報関数 $\Pi_i: \Omega \to 2^\Omega \setminus \{\emptyset\}$ を用意する．任意の $\omega \in \Omega$ に対して，情報集合 $\Pi_i(\omega)$ は分割 $\mathcal{Q}_i$ の要素であるとする，e.g., $\Pi_i(\omega) \in \mathcal{Q}_i$．情報関数 Π_i は以下の条件を満たすものとする．

C1　任意の $\omega \in \Omega$ に対して，$\omega \in \Pi_i(\omega)$.

C2　任意の $\omega, \omega' \in \Omega$ に対して，$\omega' \in \Pi_i(\omega)$ ならば，$\Pi_i(\omega') = \Pi_i(\omega)$.

プレイヤーたちの間で Ω 上の分割が束として定義できるものとする．$\bigvee_{i\in I} \mathcal{Q}_i$ としたとき，これはすべてのプレイヤーの Ω 上の分割の結び（join）とし，$\bigwedge_{i\in I} \mathcal{Q}_i$ をとしたとき，これ

はすべてのプレイヤーの Ω 上の分割の交わり（meet）とする．ここで ω を含む分割の交わりの要素を $\widehat{\Pi}(\omega)$ と記す．すなわち $\widehat{\Pi}(\omega) \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$.

例 1　2 人の主体 1 と 2 について，それぞれの $\Omega = \{1,2,3,4,5,6,7,8,9,10\}$ 上の分割を以下のように定義する：

$$P_1 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7,8\},\{9,10\}\}$$
$$P_2 = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7\},\{8,9,10\}\}$$

このとき，分割の結びは，

$$P_1 \vee P_2 = \{\{1,2\},\{3,4\},\{5\},\{6,7\},\{8\},\{9,10\}\}$$

であり，分割の交わりは，

$$P_1 \wedge P_2 = \{\{1,2,3,4\},\{5,6,7,8,9,10\}\}$$

となる．各主体の情報関数 Π_1, Π_2 をとる．真の状態が $2 \in \Omega$ であるとき，

$$\Pi_1(2) = \{1,2\},\ \Pi_2 = \{1,2,3,4\}$$

となり，$\omega = 2$ を含む分割の交わりの要素は，

$$\widehat{\Pi}(2) = \{1,2,3,4\}$$

となる．□

Ω 上の確率測度 $\mu: 2^{\Omega} \to [0,1]$ について考える．μ について共通事前確率（common prior）を仮定し，$\sum_{\omega \in \Omega} \mu(\{\omega\}) = 1$ とする．

これらの準備をもとに，共有知識（common knowledge）を定義する．そのためにまず自明（self-evident）な事象を定義する．

定義 1　事象 $F \subseteq \Omega$ が ω で自明であるとは，すべての i 対して，$\Pi_i(\omega) \subseteq F$ が成立することである．

定義 2　事象 $E \subseteq \Omega$ が ω で共有知識になっているとは，$\omega \in F \subseteq E$ を満たす自明な事象 F が存在することである．

補題 1　事象 F が ω で自明であるならば，F はすべてのプレイヤーの Ω 上の分割の交わりの要素である．

証明　事象 F が ω で自明であると仮定する．このときすべての i に対して，$F = \bigcup_{\omega \in \Omega} \Pi_i(\omega)$ であり，かつ $\bigcup_{\omega \in \Omega} \Pi_i(\omega) \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ であるから，$F \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$. ■

Aumann (1976) では，以下の定理が証明されている．

定理 1（Aumann 1976） Ω 上で共有事前確率が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ω ですべてのプレイヤーの事象 E の事後確率が共有知識になっているならば，すべてのプレイヤーの事後確率は同じ値を取る．

証明 各プレイヤー $i \in I$ の事象 E の事後確率を q_i とする．ここで ω で事象 E の事後確率 q_i であることが共有知識になっていることを事象 F とおく．このとき，$\hat{F} \subseteq F$ を満たすような自明な事象 $\hat{F}$ が存在する補題 1 より $\hat{F} \in \bigwedge_{i \in I} \mathcal{Q}_i$ であるから任意のプレイヤーの事後確率は $q_i = \mu\left(E \middle| \hat{F}\right)$ と記せる．すなわちすべてのプレイヤーの事後確率が同じになる．■

2.2 戦略集合上の分割

Bacharach (1993), Bacharach and Bernasconi (1997), Bacharach and Stahl (2000) はフレームと呼ばれるラベルの集合を用意し，ラベルと戦略とを関連づけることによって戦略の顕著さ（salient）を表現し，フォーカルポイントを静学的に特徴づけた．彼らが定義した可変フレーム理論（variable frame theory）はフレームと戦略の部分集合とを結びつけるようなモデルになっており，戦略集合を分割し，その要素に対して個別のフレームを割り振るモデルであると解釈することができる．この解釈に従えば，理論的には抽象的に戦略集合の分割を考えるモデルでフォーカルポイントの特徴づけを行うことが可能であると考えることができる．そこで本稿は可変フレーム理論の枠組みで戦略集合上の分割を考えるのではなく，情報構造において戦略集合上の分割を抽象的に定義し，フォーカルポイントを定式化するためのフレームワークを提供する．

まず $\mathbb{P}$ を戦略集合 S 上の分割の集合とする．このとき，$\bigcup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{P} \subseteq S$ とする．任意の要素 $\mathcal{P} \in \mathbb{P}$ は S 上の分割であり，分割の各要素 $P \in \mathcal{P}$ は $P \in S$ を満たす.[1] ここで i の注目関数 $\pi_i : \Omega \to \mathbb{P}$ を定義する．これは $\omega \in \Omega$ を与えられたとき，プレイヤー i が注目している S 上の分割は $\pi_i(\omega) \in \mathbb{P}$ であると解釈する．ここで ω での S 上の分割の要素を定義するために i の関数 $P_i^\omega : S \to S$ をとる．これは ω での各戦略 s がどのような分割の要素になっているのかを表したものであり，定義より $P_i^\omega(s) \in \pi_i(\omega)$ となる．このとき P_i^ω は以下の性質を満たすものとする．

P1　任意の $s \in S$ に対して，$s \in P_i^\omega(s)$.

P2　任意の $s, s' \in S$ に対して，$s' \in P_i^\omega(s)$ ならば，$P_i^\omega(s') = P_i^\omega(s)$.

---

[1] ここでは S 上の分割が相関しているものと考えている．もし S 上の分割が独立であることを仮定した場合 $\bigcup_{\mathcal{P} \in \mathbb{P}} \mathcal{P} \subseteq \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ となり，分割の各要素 $P \in \mathcal{P}$ は $P \in \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ を満たす．この場合，分割の関数も $P_i^\omega : S \to \times_{i \in I} (2^{S_i} \setminus \emptyset)$ と定義することができる．

ここで純粋戦略ナッシュ均衡を定義する．

定義３　ゲーム G において $s^* \in S$ が純粋戦略ナッシュ均衡であるとは，任意の $i \in I$ と $s_i \in S_i$ に対して，$u_i(s^*) \geq u_i(s_i, s_{-i}^*)$ を満たすことである．

ここでゲーム G におけるナッシュ均衡の集合を S^{NE} と記す．

例２　テーブルの上に５つのボール $\{1,2,3,4,5\}$ があり，ボール１と２は赤色，ボール３，４，５は黄色であるとする．ただし，ボール３には傷が入っているものとする．プレイヤー A と B はそれぞれ同時に１つのボールを選択する．このとき，ボールの番号が同じであれば，両者ともに１０点，ボールの番号が違っていれば，両者ともに 0 点を獲得するものとする．これを $G = (I, \{S_A, S_B\}, \{u_A, u_B\})$ で定式化すると，

$I = \{A, B\}$；

$S_A = S_B = \{1,2,3,4,5\}$；

$$u_i(s_A, s_B) = \begin{cases} 10 & if \ \ s_A = s_B \\ 0 & otherwise \end{cases}, \ i = A, B.$$

このとき，ナッシュ均衡の集合は $S^{NE} = \{(1,1),(2,2),(3,3),(4,4),(5,5)\}$ となる．

ここで３つの状態 $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ について考える．ω_1 を与えられたとき，各プレイヤーの戦略集合の分割は色で仕切られ，以下のようになっていると：

$P_1^{\omega_1} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$；

$P_2^{\omega_1} = \{(3,3),(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$；

$P_3^{\omega_1} = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}.$

ω_2 は色だけでなく，ボール３に傷が入っていることを A も B も知っている場合を表し，戦略集合の分割は以下のようになっているとする：

$P_1^{\omega_2} = \{(1,1),(1,2),(2,1),(2,2)\}$；

$P_2^{\omega_2} = \{(3,3)\}$；

$P_3^{\omega_2} = \{(3,4),(3,5),(4,3),(4,4),(4,5),(5,3),(5,4),(5,5)\}$；

$P_4^{\omega_3} = \{(1,3),(1,4),(1,5),(2,3),(2,4),(2,5),(3,1),(3,2),(4,1),(4,2),(5,1),(5,2)\}.$

ω_3 は色だけでなく，ボール３に傷が入っていることを A は気づいているが, B は気づいていない場合を表し，各プレイヤーの戦略集合の分割は以下のようになっているとする：

$P_{A1}^{\omega_3} = P_1^{\omega_2}, P_{A2}^{\omega_3} = P_2^{\omega_2}, P_{A3}^{\omega_3} = P_3^{\omega_2}, P_{A4}^{\omega_3} = P_4^{\omega_2}$；

$P_{B1}^{\omega_3} = P_1^{\omega_1}, P_{B2}^{\omega_3} = P_2^{\omega_1}, P_{B3}^{\omega_3} = P_3^{\omega_1}$. □

3.　フォーカルポイント

本節ではフォーカルポイント（focal point）の定義を行う．フォーカルポイントは以下の

ように定義される．

定義 4　ゲーム G において $s^* \in S$ が $\omega \in \Omega$ でフォーカルポイントであるとは，$s^* \in S^{NE}$ であり，かつ以下の条件を満たすことである：任意の i と $s \in S^{NE} \setminus \{s^*\}$ に対して，

- $s \notin P_i^{\omega}(s^*)$；
- $s' \in P_i^{\omega}(s)$ であるような $s' \in S^{NE} \setminus \{s\}$ が少なくとも 1 つ存在する．

本稿のフォーカルポイントの定義には利得の条件を含めていない．これはパレート劣位なナッシュ均衡がフォーカルポイントになる可能性を認めるためである．フォーカルポイントは以下の性質を持つ．

注釈 1　任意のゲーム G においてフォーカルポイントが存在しないような $\omega \in \Omega$ が存在するかもしれない．

集合 X に対して $|X|$ は X の要素の個数と定義する．このとき，次の注釈が成り立つ．

注釈 2　フォーカルポイントが存在するならば，$|S^{NE}| \neq 2$.

これはすなわち，ゲーム G においてナッシュ均衡の数が 2 個であるとき，フォーカルポイントは存在しないことを意味する．この注釈は，プレイヤーは 2 つの均衡に対して均衡選択を迫られた場合，戦略集合の分割だけでは区別ができず，結果としてフォーカルポイントは定まらないと解釈することができる．この場合，ナッシュ均衡がただ 2 個のみである場合には，フォーカルポイントは静学的に定まるものではなく，動学的に決まるものであると考えることができる．例えば，歴史的な背景によってどちらがフォーカルポイントとなるのか変わるかもしれない．

続いて関数 $s^f : \Omega \to S \cup \{\phi\}$ をとり，$s^f(\omega)$ を ω でのフォーカルポイントとする．また ω でのフォーカルポイントが存在しない場合は，$s^f(\omega) = \phi$ と記す．そして $S^f = \left\{ s^f(\omega) \in S \middle| \omega \in \Omega \wedge s^f(\omega) \neq \phi \right\}$ をフォーカルポイントの集合とする．

例 2（続き）　5 つのボールのケースでは，$s^f(\omega_1) = s^f(\omega_3) = \phi$，$s^f(\omega_2) = (3,3)$ となる．
□

ここで $\omega \in \Omega$ を与えたときに，$s^f(\omega) = \phi$ であるならば，任意のプレイヤー $i \in I$ と $s_i \in S_i$ に対して，

$$u_i\left(s^f(\omega)\right) = \frac{\sum_{s_{-i}\in S_{-i}}\sum_{s_i\in S_i} u_i(s_i, s_{-i})}{|S|}$$

とする．これはフォーカルポイントがない場合において，i は s_i をプレイし，他のプレイヤーはランダムに戦略をプレイした場合の i の期待効用となる．このとき，任意の $i \in I$ に対して，i が戦略 s^* に注目し，他のプレイヤーは ω で $s^f(\omega)$ に注目したとき，i が s_i^* をプレイした場合の期待効用は，

$$Eu_i(s_i^*) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}) \cdot u_i\left(s_i^*, s_{-i}^f(\omega)\right)$$

となる．以上の準備のもとで以下の定理が成立する．

定理２　任意の $\Gamma = (G, \Omega)$ において，Ω 上の共有事前確率 μ が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ある $\omega \in \Omega$ が与えられたとき，s^* がフォーカルポイントになっており，かつ $s^f(\omega) \neq \phi$ を満たす任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ と任意の i に対して $u_i(s^*) \geq u_i\left(s^f(\omega')\right)$ であることが共有知識になっているならば，すべてのプレイヤーは s^* をプレイする．

証明　$\Gamma = (G, \Omega)$ において，Ω 上の共有事前確率 μ が存在し，各プレイヤーの Ω 上の分割が共有知識になっていると仮定する．ある $\omega \in \Omega$ が与えられたとき，ω のフォーカルポイントが s^* であり，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ と任意の i に対して $u_i(s^*) \geq u_i\left(s^f(\omega)\right)$ であることが共有知識になっているとする．ここで「ω のフォーカルポイントが s^* であり，かつ任意の $\omega' \in \widehat{\Pi}(\omega)$ と任意の i に対して $u_i(s^*) \geq u_i\left(s^f(\omega)\right)$ である」という事象を E とおく．E が共有知識になっているとき，その事前確率は $\mu(E)$ であり，任意の事象 F の事後確率は $\mu(F|E) = \frac{\mu(E\cap F)}{\mu(E)}$ となるから，E が起きた場合にすべてのプレイヤー i が s^* に注目し，それをプレイした場合の期待効用と任意のプレイヤー i が任意の $s_i \in S_i$ をプレイした場合の期待効用との関係は，

$$Eu_i(s_i^*|E) = \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}|E) \cdot u_i\left(s_i^*, s_{-i}^f(\omega)\right) \geq \sum_{\omega\in\Omega} \mu(\{\omega\}|E) \cdot u_i\left(s_i, s_{-i}^f(\omega)\right) = Eu_i(s_i|E).$$

従って，すべてのプレイヤーは s^* をプレイする．■

この定理では，ω' でのフォーカルポイント $s^f(\omega')$ が ω でのフォーカルポイント s^* と比べてパレート優位であったとしても，$\omega' \notin \widehat{\Pi}(\omega)$ である場合，$s^f(\omega')$ はフォーカルポイントとはなり得ないので，パレート劣位なフォーカルポイント s^* がプレイされうる余地を残している．

例 2（続き）　5 つのボールのケースにおいて，$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$ 上の共有事前確率を $\mu(\omega_1) = 0.2$，$\mu(\omega_2) = 0.6$，$\mu(\omega_3) = 0.2$ とおく．プレイヤー A と B の Ω 上の分割をそれぞれ

$$\Pi_A(\omega_1) = \{\omega_1\},\ \Pi_A(\omega_2) = \Pi_A(\omega_3) = \{\omega_2, \omega_3\}\text{；}$$
$$\Pi_B(\omega_1) = \{\omega_1\},\ \Pi_B(\omega_2) = \{\omega_2\},\ \Pi_B(\omega_3) = \{\omega_3\}$$

とし，真の状態は ω_2 であると仮定する．このときフォーカルポイントは $(3,3)$ であり，ω_2 を含む分割の交わりは $\widehat{\Pi}(\omega_2) = \{\omega_2, \omega_3\}$ となっている．また $\omega_3 \in \widehat{\Pi}(\omega_2)$ に対して，$s^f(\omega) = \phi$ が成立する．すなわち，$u_i\left(s^f(\omega_3)\right) = u_i(\phi) = 2$.

今，ω_2 のフォーカルポイントが $(3,3)$ であり，かつ $u_i(3,3) = 10 > u_i\left(s^f(\omega_3)\right)$ が共有知識になっているとする．このとき，補題から $\widehat{\Pi}(\omega_2)$ は自明な事象であるから，「ω_2 のフォーカルポイントが $(3,3)$ であり，かつ $u_i(3,3) = 10 > u_i\left(s^f(\omega_3)\right)$ が共有知識になっている」という事象 E に対して，$\widehat{\Pi}(\omega_2) \subseteq E$ でなければならない．このときプレイヤー A もプレイヤー B もフォーカルポイントであるボール 3 を選択した場合の期待効用は

$$Eu_i(3|E) = \frac{0.6}{0.8} \cdot u_i(3,3) + \frac{0.2}{0.8} \cdot u_i\left(3, s_{-i}^f(\omega_3)\right) = 8$$

であり，それ以外のボール $s_i \neq 3$ を選んだ場合の期待効用は

$$Eu_i(s_i|E) = \frac{0.6}{0.8} \cdot u_i(s_i, 3) + \frac{0.2}{0.8} \cdot u_i\left(s_i, s_{-i}^f(\omega_3)\right) = \frac{1}{2}$$

であり，明らかに $Eu_i(3|E) > Eu_i(s_i|E)$ となっている．従って，プレイヤー A も B もボール 3 を選択する．□

4.　結論と議論

本稿ではフォーカルポイントを静学的に定義し，ある状態でのフォーカルポイントが共有知識になっていること，その状態でのフォーカルポイント戦略が同じ情報集合における他の状態のフォーカルポイント戦略と比べてパレート優位になっていることが共有知識に

なっているならば，すべてのプレイヤーがフォーカルポイントを選択することを証明した．本稿のアプローチは Bacharach (1993), Bacharach and Bernasconi (1997), Bacharach and Stahl (2000) の可変フレーム理論とは異なるが，フレームと呼ばれるラベルの集合を用いずにフォーカルポイントを抽象的にかつ静学的に定義することができた．

ただし，本稿には課題がある．本稿のモデルの場合，ナッシュ均衡の数が2個しかない場合には定義上フォーカルポイントが存在しないことになっている．これは一度きりのゲーム的状況に突然直面した場合に，判断材料がないために特定の均衡戦略に着目することができないようなケースを反映していると解釈できるかもしれない．しかし Schelling (1960) では被験者に表か裏かを選ばせてパートナーと同じものを選んだ場合には報酬がもらえるような実験において，表を選ぶ被験者が多かったことを実験で示している．また繰り返し的な状況であれば，ナッシュ均衡が2個しかない場合でも学習によって特定の均衡がフォーカルポイントとなることがありうるかもしれない．そうした場合，本稿での定式化とどのように整合性を取るのかが重要な点となるだろう．これを今後の課題としたい．

【参考文献】

Aumann, R.J., (1976), “Agreeing to disagree”, *The Annals of Statics*, Vol. 4 (2), pp. 1236-1239.

Bacharach, M., (1993), “Variable Universe Games”, in K. Binmore, A. Kirman, P. Tani (Eds.), Frontiers of Game Theory, MIT Press, pp. 255-276.

Bacharach, M., and Bernasconi, M., (1997), “The variable frame theory of focal points: an experimental study”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 19 (1), pp. 1-45.

Bacharach, M., and Stahl, D.O., (2000), “Variable-frame level-n theory”, *Games and Economic Behavior*, Vol. 32 (2), pp. 220-246.

Schelling, T.C., (1960), *The Strategy of Conflict*, Harvard University Press.

中央大学経済研究所
(INSTITUTE OF ECONOMIC RESEARCH, CHUO UNIVERSITY)
代表者　林　光洋　（Director: Mitsuhiro Hayashi）
〒192-0393　東京都八王子市東中野　742-1
(742-1 Higashi-nakano, Hachioji, Tokyo 192-0393　JAPAN)
TEL: 042-674-3271　　+81 42 674 3271
FAX: 042-674-3278　　+81 42 674 3278
E-mail: keizaiken-grp@g.chuo-u.ac.jp
URL: https://www.chuo-u.ac.jp/research/institutes/economic/